



Cahier de calcul

révisions du collège et entraînements pour la Seconde

Seconde
1750 calculs

Page web du *Cahier de calcul*,
dernières versions



Ce cahier de calcul a été écrit collectivement par une équipe composée de professeurs en lycée et de professeurs en classes préparatoires.

Conception et coordination

Colas BARDAVID

Aide à la conception

Jérôme TROCHON

Équipe des auteurs

Mélissa BAILLOEUIL-INGLART
Aude BERNARD-CHAMPMARTIN
Ménard BOURGADE
Van Bien BUI
Alain CAMANES
Pierre CAUCHOIS
Carole CHABANIER
Baptiste CLAUSTRE
Geneviève DAVION

Anne-Lucie DELVALLEZ
Thomas DESORGERIS
Céline DONADEI
William GREGORY
Benjamin GROUX
Nicolas LAILLET
Sandrine LARÔME
François LAURENT
Vincent LE GRUIEC

Blaise LE MEAUX
Lionel MAGNIS
Arthur MEYER
Quang-Thai NGO
Alan PELLÉ
Hervé SVOBODA
Jérôme TROCHON

Tests et relecture

Ahmed AIT HAMMOU OULHAJ, Anthony AMALRIC, Flavie AUBOURG-MEZERETTE, Frédéric BROSSARD, Stéphane BURGUÉ, Alexandre CHARRON, Julie DELAHAYE, Redouane DZIRI, Alice ERNOULT, Clément GABORIAUD, Laura GAY, Emmanuel GENNEQUIN, Xavier GRAND-JACQUOT, Nicolas HUBERT, Kylian JOURDAINE, Jeremy KUPERMINE, François LAUSTRIAT, Vincent LE GROS, Francis LECLEROT, François-Marc LEVOINTURIER-VAJDA, Ondine MEYER, Anne-Claire MULLER, Cédric PIERQUET, Agnès RIGNY, Manon RIVAT, Catherine ROUSSEAU, Nathalie SAVAZZI, Achraf TOYBOU, Marvin VERSTRAETE

Illustrations

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).
Le pictogramme de la roue crantée a été créé par AFY STUDIO (The Noun Project).
Le pictogramme de la calculatrice a été créé par Sita RAISITA (The Noun Project).

L'illustration de la couverture a été réalisée par Noé FERRAGU, inspiré des créations de Simone CONRADI. Elle représente les solutions de certaines équations paramétrées.

Sommaire

<i>Avant-propos</i>	vii
<i>Introduction</i>	ix

Calcul élémentaire

☐ Fiche 1.	★★★★	Calculs avec le signe « moins »	2
☐ Fiche 2.	★★★★	Priorités dans les opérations	4

Fractions

☐ Fiche 3.	★★★★	Sommes et différences de fractions	6
☐ Fiche 4.	★★★★	Réécriture de fractions	7
☐ Fiche 5.	★★★★	Produits et sommes de fractions	8
☐ Fiche 6.	★★★★	Bilan et approfondissement sur les fractions	10

Fractions avancées

☐ Fiche 7.	★★★★	Fractions de fractions	14
☐ Fiche 8.	★★★★	Fractions d'expressions	16
☐ Fiche 9.	★★★★	Comparaison de fractions	18

Puissances

☐ Fiche 10.	★★★★	Généralités sur les puissances	20
☐ Fiche 11.	★★★★	Puissances et fractions	22
☐ Fiche 12.	★★★★	Application des puissances	24
☐ Fiche 13.	★★★★	Bilan et approfondissement sur les puissances	26

Racines carrées

☐ Fiche 14.	★★★★	Calculs avec des racines I	30
☐ Fiche 15.	★★★★	Calculs avec des racines II	32
☐ Fiche 16.	★★★★	Méthode de la quantité conjuguée	34
☐ Fiche 17.	★★★★	Bilan et approfondissement sur les racines carrées	36

Calcul littéral

☐	Fiche 18.	★★★★	Développement d'expressions I.....	40
☐	Fiche 19.	★★★★	Factorisations	42
☐	Fiche 20.	★★★★	Premières identités remarquables	44
☐	Fiche 21.	★★★★	Factorisations à l'aide de $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	46
☐	Fiche 22.	★★★★	Développement d'expressions II.....	48
☐	Fiche 23.	★★★★	Relations entre variables.....	50
☐	Fiche 24.	★★★★	Bilan et approfondissement sur les factorisations.....	52

Inégalités et inéquations

☐	Fiche 25.	★★★★	Tableaux de signes et inéquations I.....	56
☐	Fiche 26.	★★★★	Inéquations du premier degré.....	58
☐	Fiche 27.	★★★★	Inégalités et valeurs absolues	60
☐	Fiche 28.	★★★★	Manipulation d'inégalités	62
☐	Fiche 29.	★★★★	Tableaux de signes et inéquations II	64
☐	Fiche 30.	★★★★	Tableaux de signes et inéquations III	66

Équations

☐	Fiche 31.	★★★★	Équations du premier degré	68
☐	Fiche 32.	★★★★	Équations du premier degré avec paramètre.....	69
☐	Fiche 33.	★★★★	Équations du deuxième degré.....	70
☐	Fiche 34.	★★★★	Systèmes d'équations	72
☐	Fiche 35.	★★★★	Bilan et approfondissement sur les équations et inéquations	74

Fonctions

☐	Fiche 36.	★★★★	Images et antécédents	78
☐	Fiche 37.	★★★★	Tableaux de variations.....	80
☐	Fiche 38.	★★★★	Points des courbes des fonctions.....	82
☐	Fiche 39.	★★★★	Fonctions et inéquations.....	84
☐	Fiche 40.	★★★★	Calcul avec les fonctions.....	86
☐	Fiche 41.	★★★★	Bilan et approfondissement sur les fonctions	88

Vecteurs

☐	Fiche 42.	★★★★	Représentation graphique des vecteurs	92
☐	Fiche 43.	★★★★	Vecteurs et coordonnées	94
☐	Fiche 44.	★★★★	Vecteurs colinéaires et déterminant	96
☐	Fiche 45.	★★★★	Norme des vecteurs	98
☐	Fiche 46.	★★★★	Relation de Chasles	100
☐	Fiche 47.	★★★★	Application des vecteurs à la géométrie	102
☐	Fiche 48.	★★★★	Barycentres	106

Géométrie

☐	Fiche 49.	★★★★	Vecteurs directeurs d'une droite	108
☐	Fiche 50.	★★★★	Équations de droites	110
☐	Fiche 51.	★★★★	Droites parallèles et équations de droites	116

Pourcentages

☐	Fiche 52.	★★★★	Proportions	120
☐	Fiche 53.	★★★★	Taux d'évolution	122

Probabilités

☐	Fiche 54.	★★★★	Généralités sur les probabilités	126
☐	Fiche 55.	★★★★	Probabilités d'intersections et de réunions	128
☐	Fiche 56.	★★★★	Probabilités conditionnelles	132

Arithmétique

☐	Fiche 57.	★★★★	Diviseurs et multiples	136
☐	Fiche 58.	★★★★	Nombres premiers et applications	138

Réponses et corrigés

Réponses et corrigés	141
----------------------------	-----

Avant-propos

Avant d'entrer dans le vif du sujet, à savoir le calcul, nous avons souhaité commencer ce livre par un texte sur l'intelligence artificielle. En effet, cette technologie va changer notre façon d'apprendre et nous avons considéré que donner quelques conseils à nos lecteurs à ce sujet pouvait se révéler utile. Bonne lecture !

IA et apprentissage des mathématiques

Plaidoyer pour une utilisation raisonnée

Les Gants Magiques Musicaux

Imaginez que, demain ou après-demain, un nouvel objet révolutionnaire fasse son apparition : les Gants Magiques Musicaux (qu'on abrégera dans la suite en GMM).

PUB

Les GMM[®] permettent de jouer n'importe quel morceau au piano !

Enfilez-les, approchez-les de votre visage et dites à vos gants quel morceau vous souhaitez jouer : une sonate de Mozart, un prélude de Chopin ou une gymnopédie de Satie.

Les gants s'illuminent et commencent à bouger. Allez vous asseoir derrière votre piano. Positionnez vos mains au-dessus des touches. C'est parti : les GMM[®] s'animent et viennent jouer à votre place (et à la perfection) le morceau choisi.

Grâce aux GMM[®] : finis les cours de piano, finies les longues heures d'étude, finies les gammes. Grâce aux GMM[®], tout le monde peut maintenant faire du piano sans effort !

Achetez les GMM[®] !

— En promo pour le Black Friday, à partir de 399 € ! —

Cela n'arrivera pas.

En effet, même si un jour de tels gants « magiques » venaient à être inventés, les gens continueraient à apprendre à jouer du piano. Quand on apprend à jouer un morceau au piano, on est fier de savoir le jouer et toutes les heures à répéter ce morceau n'ont pas été vaines. En apprenant le piano, on cultive quelque chose à l'intérieur de soi, et cela participe à notre épanouissement.

Les gens n'apprennent pas à jouer du piano simplement pour être capables de jouer tel ou tel morceau. Les heures de cours, le processus d'apprentissage font aussi partie de ce qu'ils recherchent.

L'IA et les maths

L'intelligence artificielle (IA) a fait des progrès complètement incroyables ces dernières années.

Avec ChatGPT, Claude, Gemini et consorts, nous disposons aujourd'hui d'outils ultra-puissants pour nous assister dans différentes tâches. Parmi elles, l'IA est désormais capable de résoudre des problèmes de mathématiques. Et, elle le fait très bien.

—> *Dès lors, pourquoi continuer à apprendre les mathématiques ?*

Pour la même raison que les GMM ne remplaceront jamais les leçons de piano.

Apprendre les mathématiques, c'est une façon de prendre soin de soi. C'est une façon de progresser, de grandir, de devenir adulte. Apprendre les mathématiques, c'est apprendre une façon de penser.

Il est tout à fait possible qu'après vos années d'étude vous n'utilisiez que peu, voire pas du tout, les mathématiques. Pourtant, avoir appris les mathématiques n'aura pas été inutile. En les étudiant et en cherchant des exercices, vous aurez cultivé des qualités qui vous seront utiles partout et tout le temps : abstraction, réflexion, concentration, imagination, persévérance, etc.

Étudier les mathématiques, c'est une façon de cultiver un savoir-faire, c'est une façon de s'enrichir intérieurement, et c'est une chance.

—> *Peut-on, pour autant, utiliser l'IA quand on apprend les mathématiques ?*

Oui et non.

- Oui : vous pouvez demander à l'IA de vous expliquer quelque chose que vous n'avez pas compris.
- Non, et c'est très important :

vous ne devez pas demander à l'IA de vous aider à résoudre un exercice.

Chercher un exercice, cela fait partie de l'apprentissage des mathématiques. C'est même une des composantes essentielles de cet apprentissage. C'est dans les moments de recherche que vous progressez le plus en mathématiques. C'est pourquoi il est important de passer du temps à chercher, à « brouillonner », à tester des idées, à explorer des pistes, etc.

Pour résumer

—> Efforcez-vous de ne pas utiliser l'IA en mathématiques.

Vous pouvez l'utiliser pour lui demander de vous expliquer quelque chose. Mais, vous ne devez jamais l'utiliser pour vous aider à résoudre un problème ou pour vous donner la solution. Ça ne sert à rien et c'est stérile.

—> En vous tenant à cette ligne de conduite, vous progresserez en mathématiques et vous cultiverez des qualités de grande valeur. Vous vous entraînerez aussi à utiliser votre intelligence naturelle... Et, qui sait, dans quelques années, ce sera peut-être une compétence très rare et très recherchée !



*Dans tout ce livre, l'usage de la calculatrice
est strictement et formellement interdit.*



*Utiliser une calculatrice pour les exercices serait tout simplement absurde :
le but même de ce livre est de fournir à ses lecteurs
un outil pour s'entraîner au calcul.*

Introduction

Le calcul

Le calcul a parfois été délaissé par l'école.

On lui reprochait son côté rébarbatif, on disait que les calculatrices pouvaient s'en charger.

On lui préférait les activités de recherche, plus ludiques, plus intéressantes.

On déconseillait de donner aux élèves des fiches de calcul.

Certes, savoir chercher est essentiel ; mais, tout de même, ce faisant, on a formé des élèves à qui il manquait quelque chose de fondamental.

Les vertus du calcul

Le calcul a de nombreuses qualités, de nombreuses vertus.

- Le calcul est indispensable aux mathématiques.

Sans calcul, les mathématiques seraient un paysage inerte, sans mouvement.

C'est le calcul qui permet de transformer une expression $A(x)$ en une autre expression $B(x)$.

C'est le calcul qui permet de montrer que deux quantités sont égales, que deux choses sont identiques.

Quand on explore une situation mathématique, l'intuition est la boussole, c'est elle qui nous indique la direction à prendre. Mais c'est le calcul qui permet d'avancer, de passer d'une étape à la suivante.

- Le calcul permet de se familiariser avec les objets mathématiques compliqués.

Certains objets mathématiques sont difficiles à appréhender. Qu'on pense par exemple aux vecteurs. On peut être dérouté la première fois qu'on doit raisonner avec les vecteurs. Dans ce cas, il est conseillé de beaucoup calculer avec les vecteurs. À force d'en faire, on s'y habitue ; à la fin, on n'est plus dérouté.

- Le calcul donne des idées.

Face à un problème mathématique, être fort en calcul est très utile. On imagine rapidement ce qui va se passer, on peut prévoir « de tête » la direction globale du calcul et donc prendre une bonne direction.

- Le calcul est comme un échauffement mathématique.
- Le calcul est *a priori* une activité sans piège.

Il suffit de suivre les règles méthodiquement.

- Le calcul peut même être ludique !

L'intérêt du calcul

C'est très simple.

Si vous voulez bien comprendre les mathématiques, le calcul est indispensable.

Quand on apprend à jouer au piano, faire des gammes est, de même, indispensable. Elles permettent de délier les doigts, elles permettent d'ancrer dans les mains des habitudes, des réflexes. Sans gammes, certains morceaux sont inabordables.

De même, la pratique du calcul permet de mieux comprendre les mathématiques.

Le cahier de calcul

Le cahier de calcul est l'outil idéal pour vous entraîner au calcul, **en toute autonomie**.

Il a été conçu par une large équipe de professeurs de mathématiques, en lycée et en classes préparatoires, tous soucieux de vous apporter **l'aide et les outils pour réussir**.

Pour profiter totalement de cet outil, **pratiquez régulièrement** : nous vous conseillons de faire (au moins) quinze minutes de calcul chaque jour.

Comment est-il organisé ?

Difficulté des fiches

La difficulté des fiches est indiquée par des étoiles : de ★★★★★ à ★★★★★.

Temps de résolution des calculs

Le temps de résolution de chaque calcul (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par :

- des horloges ⌚ pour les exercices de difficulté normale ;
- des roues crantées ⚙ pour les exercices plus difficiles.

Des cadres pour les réponses

Nous vous invitons à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à nous écrire à l'adresse cahierdecacul@gmail.com.

Merci, en nous contactant, de donner l'identifiant de la fiche, écrit en haut à droite.

Énoncés

Calculs avec le signe « moins »



Manipuler les nombres relatifs et les quatre opérations

● Calcul 1.1



Calculer :

a) $(-3) + (-8) \dots\dots$

d) $(12,5) + (-4) \dots\dots$

g) $(-38) + 64 \dots\dots$

b) $(-4) - (+10) \dots\dots$

e) $11 + (-6,7) \dots\dots$

h) $17,6 - (-4,7) \dots\dots$

c) $(-3,5) + 7 \dots\dots$

f) $-5,2 - (-3,1) \dots\dots$

i) $-83,4 + (-34,8) \dots\dots$

● Calcul 1.2



Calculer :

a) $(-4) \times 8 \dots\dots$

c) $(-6) \times (-9) \dots\dots$

e) $(-7) \times (-1,1) \dots\dots$

b) $(+7) \times (-5) \dots\dots$

d) $(-8) \times 2,5 \dots\dots$

f) $(-2) \times 3,7 \dots\dots$

● Calcul 1.3



Calculer :

a) $(-48) \div 8 \dots\dots$

c) $-(-24) \div (-16) \dots\dots$

e) $(-64) \div (-16) \dots\dots$

b) $(-36) \div (-9) \dots\dots$

d) $18 \div (-4) \dots\dots$

f) $91 \div (-7) \dots\dots$

● Calcul 1.4 — Plus compliqué.



Calculer :

a) $\frac{48}{-4} \dots\dots$

d) $\frac{53 + (-17)}{18 \div (-2)} \dots\dots$

b) $\frac{-24}{14 + (-8)} \dots\dots$

e) $\frac{(-56) \div 4}{35 \div (-5)} \dots\dots$

c) $\frac{-12,5 \times 4}{(-12,5) + 7,5} \dots\dots$

f) $-\frac{(-4) \times (-12)}{(-72) \div 9} \dots\dots$

● Calcul 1.5



Calculer :

a) $(-2) + 3 - (-5)$

c) $(-23) - (-17) + 3,6$

b) $7,3 + (-15) - (-17)$

d) $-47 - (-38) - 65$

● Calcul 1.6



Calculer :

a) $(3 - 5) - (4 - 6)$

b) $(23 - 15) + (17 - 38)$

c) $-27 + (-12) - (34 + (-15))$

d) $-((-43) - (-24)) - ((-15) - (-39))$

● Calcul 1.7 — Avec des variables.



Calculer :

a) $(-x) + 3x$

c) $(-32z) + 17z$

b) $12y + (-9y)$

d) $-29t - (-47t)$

● Calcul 1.8 — Avec des fractions.



Calculer :

a) $\frac{-12}{4}x + \frac{15}{3}x$

c) $\left(-\frac{36}{4}z\right) + \frac{18}{9}z$

b) $-\frac{24}{6}y + \left(-\frac{27}{9}y\right)$

d) $\left(-\frac{48}{8}t\right) - \left(-\frac{72}{9}t\right)$

● Calcul 1.9 — Pour terminer.



Calculer :

a) $\frac{(-3x) + (-5x)}{(-36) \div 9}$

c) $\frac{(-144z) \div 12}{24 \div (-6)}$

b) $\frac{(-14y) - 28y}{(-49) \div (-7)}$

d) $\frac{(-3) \times (-4t) + (-4t)}{((-28) \div 7) + (48 \div (-12))}$

Réponses mélangées

-11	-1,5	-12	6	-7y	-7z	-35	3,5	-6	2x	18t	
-58	-15z	10	-14	2	8,5	-4	-2,1	-t	9,3	-13	4
-5	-118,2	4	0	-2,4	4,3	-20	-74	-6y	-32	2t	6
26	2x	-7,4	-13	-4,5	22,3	3z	3y	-4	2x	7,7	54

► Réponses et corrigés page 142

Priorités dans les opérations



Maîtriser les priorités dans les calculs

● Calcul 2.1



Calculer :

a) $22 - (5 + 9)$

c) $-3 - (10 - (-7))$

b) $-2 - (-5 - 9)$

d) $(-2 + 3) - ((-5) - (-9))$

e) $-(5 - (-8)) - (-(-2) + (-9) \times (-4))$

f) $-2 - (-3 - (-4 - (-5 - (-6 - (-7)))))$

● Calcul 2.2



Calculer :

a) $3 - (4 - 5)$

d) $3 - 4 \times (-5)$

b) $(3 - 4) - 5$

e) $-(-3) \times (-4) - 5$

c) $3 \times 4 - 5$

f) $-3 - 4 \times (-5)$

● Calcul 2.3



Calculer :

a) $2 + 3 \times 5 + 7 \times 6$

d) $-7 + (-13 + 6) \times (-3 + 5)$

b) $-2 - (-6)(-4)$

e) $15 - 3(-5 - 9) \div (-2)$

c) $5 - 5 \times (2 \times (-1 + 3) \times (-4))$..

f) $-2 - (7 - 3) \times (2 - 4)$

g) $-2 - (6 - (-3)) - (-2 \div (2 \div 4))$

h) $-(-2) \div (-(-10) \div (-5)) + 3 - 3 \div (3 \div (-9))$

● Calcul 2.4



Calculer :

a) $-2 + 4^2 - 3 \times (-2)^2$

c) $5^2 \div (-7 - (-2)) - 3(-5)$

b) $9 - (6 - 3(-2)^2)$

d) $1 - (-2)^4 + (-3)^3 - (-4)^2$

● Calcul 2.5 — Quelques fractions.



Calculer, en donnant le résultat sous forme irréductible :

a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{5}$

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$

b) $-\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \div \frac{1}{12}$

d) $-\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \div \left(-\frac{3}{14} + \frac{1}{7}\right)$

● Calcul 2.6



Calculer :

a) $-(5 + 3x) - 6x + (1 - x) \times (-3)$

b) $-(3x - 5) - (-2) \times (2 + 3x) - 3(1 - 2x)$

● Calcul 2.7



Calculer :

a) $(-2 \times (-4))^2 + (-2 + (-4))^2$

b) $(-2 + 2(-4))^2 - (-2^3 + 6)^2$

c) $-(3 \times (-3))^2 \div ((-1 - 2)^2 \div (1 \div 3))$

d) $(-(-3) \div (-3)^2)^2 \times ((-1 - 2)^2 \times (1 \div 3))$

Réponses mélangées

2	-58	$-6x - 8$	$-\frac{7}{15}$	7	-3	-3	15	85	-51	-20
11	$-\frac{31}{7}$	-21	$\frac{14}{15}$	-17	-26	3	$\frac{1}{3}$	-6	96	23
6	10	100	$\frac{1}{8}$	$9x + 6$	12	8	17	59	-6	$\frac{59}{6}$
										4

► Réponses et corrigés page 144

Sommes et différences de fractions



Revoir les sommes et différences de fractions

Pour les cinq premiers exercices, effectuer le calcul et donner le résultat sous forme irréductible.

● Calcul 3.1



a) $2 + \frac{1}{3} \dots\dots\dots$ b) $7 + \frac{1}{5} \dots\dots\dots$ c) $3 + \frac{5}{9} \dots\dots\dots$

● Calcul 3.2



a) $5 - \frac{11}{7} \dots\dots\dots$ b) $\frac{16}{3} - 2 \dots\dots\dots$ c) $3 + \frac{-14}{6} \dots\dots\dots$

● Calcul 3.3



a) $\frac{15}{14} - \frac{9}{14} \dots\dots\dots$ b) $\frac{5}{6} + \frac{16}{6} + \frac{21}{6} \dots\dots\dots$ c) $\frac{39}{36} - \frac{27}{36} \dots\dots\dots$

● Calcul 3.4



a) $\frac{7}{4} + \frac{5}{12} \dots\dots\dots$ b) $\frac{62}{12} + \frac{12}{48} \dots\dots\dots$ c) $\frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{1}{10^3} \dots\dots\dots$

● Calcul 3.5



a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \dots\dots\dots$ c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \dots\dots\dots$ e) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \dots\dots\dots$
 b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \dots\dots\dots$ d) $\frac{20}{15} + \frac{-4}{9} \dots\dots\dots$ f) $\frac{5}{9} + \frac{-15}{24} - \frac{24}{64} \dots\dots\dots$

● Calcul 3.6 — Des expressions.



Écrire les expressions suivantes sous la forme $ax + b$ où a et b sont des fractions irréductibles.

a) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{x+1}{3} \dots\dots\dots$ b) $\frac{2x+3}{6} + \frac{x-3}{4} \dots\dots\dots$

Réponses mélangées

$$\frac{\frac{24}{7}}{\frac{7}{3}} \quad \frac{\frac{8}{9}}{\frac{32}{9}} \quad \frac{\frac{7}{12}x - \frac{4}{9}}{\frac{7}{12}x - \frac{1}{4}} \quad \frac{\frac{13}{6}}{\frac{10}{3}} \quad \frac{\frac{36}{5}}{\frac{1}{3}} \quad \frac{\frac{7}{12}x - \frac{1}{6}}{\frac{251}{1000}} \quad \frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{3}} \quad \frac{\frac{65}{12}}{\frac{2}{3}} \quad \frac{\frac{23}{12}}{\frac{11}{12}}$$

► Réponses et corrigés page 146

Réécriture de fractions



S'entraîner à la réécriture de fractions et de nombres décimaux

● Calcul 4.1



Écrire les fractions suivantes sous la forme d'une fraction de dénominateur 100.

a) $\frac{7}{10}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{13}{20}$

● Calcul 4.2 — Simplification de fractions.



Écrire les fractions suivantes sous leur forme irréductible.

a) $\frac{12}{18}$ c) $\frac{42}{-28}$ e) $\frac{5 \times 24}{18 \times 25}$
 b) $-\frac{35}{21}$ d) $\frac{18}{720}$ f) $\frac{11 \times 14}{7 \times 33}$

● Calcul 4.3



Lequel de ces nombres n'est pas égal à $\frac{1}{5}$?

(a) 0,2 (b) $\frac{6}{30}$ (c) $\frac{20}{100}$ (d) $\frac{5}{20}$ (e) $\frac{3}{15}$

● Calcul 4.4



Quel nombre n'est pas égal aux autres nombres ?

(a) $\frac{20}{45}$ (b) $\frac{12}{18}$ (c) $\frac{-16}{-36}$ (d) $\frac{4}{9}$ (e) $\frac{32}{72}$

● Calcul 4.5 — Avec des décimaux.



Écrire les nombres décimaux suivants sous la forme d'une fraction irréductible.

a) 1,2 b) 2,5 c) 0,25 ... d) 0,8

Réponses mélangées

$\frac{5}{2}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{70}{100}$ (b) $\frac{1}{4}$
 $-\frac{3}{2}$ $\frac{1}{40}$ $-\frac{5}{3}$ $\frac{65}{100}$ $\frac{75}{100}$ $\frac{4}{5}$ (d)

► Réponses et corrigés page 147

Produits et sommes de fractions



Effectuer des produits et des sommes de fractions

● Calcul 5.1 — Avec des décimaux.



Écrire les nombres décimaux suivants sous forme de fraction irréductible.

- a) 0,25 c) 0,75 e) -2,4
- b) -0,2 d) 0,060 f) 10,04

● Calcul 5.2 — Simplification de fractions.



Écrire les fractions suivantes sous forme irréductible.

- a) $\frac{42}{36}$ c) $\frac{2\,100}{840}$
- b) $\frac{4-7}{3 \times 7}$ d) $\frac{42 \times (-10)^2}{(-70) \times 60}$

● Calcul 5.3 — Produit de fractions.



- a) Combien vaut $\frac{2^2 \times 3 \times 5}{7 \times 3^2 \times 5^2} \times \frac{5 \times 7 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 11}$? *Plusieurs réponses sont possibles.*

- (a) $\frac{10}{297}$ (b) $\frac{2 \times 5}{3^2 \times 11}$ (c) $\frac{2 \times 5}{3^3 \times 11}$ (d) $\frac{10}{99}$ (e) $\frac{7 \times 5}{3 \times 11}$

.....

- b) Combien vaut $\frac{2 \times 3 - 12}{2 \times 3^2 \times 5^2} \times \frac{5 \times 3 \times 5}{6 - 3 \times 11}$?

- (a) $\frac{1}{3^2}$ (b) $-\frac{1}{27}$ (c) $-\frac{1}{15}$ (d) $-\frac{1}{9}$ (e) $\frac{1}{3^3}$

.....

● Calcul 5.4



Effectuer les calculs suivants, en donnant le résultat sous forme irréductible.

- a) $\frac{2}{9} \times \frac{15}{2^2}$ c) $\frac{1}{3} \times \left(\frac{-2}{4}\right)^3 \times \left(\frac{5}{7}\right)^2 \times \frac{6}{8}$
- b) $\frac{2^2 \times 3 \times 5}{7 \times 3^2 \times 5} \times \frac{7 \times 5}{2 \times 3 \times 11}$ d) $\frac{2}{12} \times \frac{12}{10} \times \frac{5}{8 \times 6} \times \frac{6}{4} \times \frac{1}{2}$

● Calcul 5.5 — Somme de fractions.



Effectuer les calculs suivants, en donnant le résultat sous forme irréductible.

- a) $\frac{2}{5} - \frac{7}{3} \dots\dots\dots$ d) $\frac{42}{36} - \frac{22}{-3} \dots\dots\dots$ g) $\frac{42}{36} - 1 \dots\dots\dots$
- b) $-\frac{11}{15} + \frac{11}{35} \dots\dots\dots$ e) $\frac{-15}{6} - \frac{2}{7} \dots\dots\dots$ h) $\frac{-90}{87} + 1 \dots\dots\dots$
- c) $\frac{7}{30} + \frac{115}{150} \dots\dots\dots$ f) $\frac{35}{21} - \frac{53}{12} \dots\dots\dots$ i) $\frac{116}{87} - 1 \dots\dots\dots$

● Calcul 5.6



Effectuer les calculs suivants, en donnant le résultat sous forme irréductible.

- a) $\frac{2}{3} + \frac{5}{2} - \frac{1}{7} \dots\dots\dots$ c) $\frac{-20}{75} + \frac{3}{-45} + \frac{4}{12} \dots\dots\dots$
- b) $\frac{2}{-15} - \frac{7}{12} + \frac{3}{10} \dots\dots\dots$ d) $\frac{-30}{21} + \frac{14}{-42} + \frac{-18}{12} - \frac{-45}{36} \dots\dots\dots$

● Calcul 5.7



Effectuer les calculs suivants, en donnant le résultat sous forme irréductible.

- a) $2\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{5}{2}\right) - 1 \dots\dots\dots$
- b) $-\left(-\frac{5}{6} + \frac{3}{4} + 1\right) + \left(3 - \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{4}\right) + 2 \dots\dots\dots$

● Calcul 5.8 — Des quatrièmes proportionnelles.



Dans chaque cas, déterminer le nombre manquant pour obtenir un tableau de proportionnalité.

On donnera la réponse sous forme irréductible.

- a)

$\frac{12}{45}$	$\frac{1}{2}$
.....	$\frac{45}{12}$

 b)

$\frac{1}{48}$	$-\frac{2}{3} + 1$
$\frac{3}{7} - \frac{1}{8}$	

 c)

$\left(-\frac{3}{2}\right)^3$	
$\frac{1}{5} - (-3)^2$	$5 \times \frac{12}{15}$

Réponses mélangées

$-\frac{39}{14}$ $-\frac{11}{25}$ $-\frac{12}{5}$ $\frac{1}{4}$ (e) 2 $\frac{1}{64}$ $-\frac{1}{7}$ $-\frac{169}{84}$ $\frac{5}{2}$ $-\frac{5}{24}$
 $\frac{34}{7}$ $-\frac{25}{1568}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{71}{60}$ 1 -1 0 $\frac{10}{99}$ $-\frac{1}{5}$ (a) et (c) $\frac{251}{25}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{135}{88}$
 $-\frac{44}{105}$ $\frac{7}{6}$ $-\frac{1}{29}$ $-\frac{5}{12}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{127}{42}$ $\frac{3}{50}$ $\frac{17}{2}$ $-\frac{29}{15}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{3}$

► Réponses et corrigés page 148

Bilan et approfondissement sur les fractions



Poursuivre et approfondir les calculs avec des fractions

Calculs élémentaires

● Calcul 6.1 — Quelques nombres entiers.



Écrire chacune des fractions suivantes sous forme de nombre entier.

a) $\frac{6}{3}$

c) $\frac{35}{7}$

e) $\frac{0}{2}$

b) $\frac{30}{5}$

d) $\frac{4}{1}$

f) $\frac{0}{1}$

● Calcul 6.2



Écrire les fractions suivantes sous forme irréductible.

a) $\frac{2}{8}$

c) $\frac{25}{-10}$

e) $-\frac{60}{140}$

b) $\frac{-6}{9}$

d) $\frac{-24}{-20}$

f) $-\frac{42}{-56}$

● Calcul 6.3 — Quelques sommes.



Effectuer les calculs suivants. On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

c) $\frac{5}{2} + 3$

e) $\frac{7}{4} + \frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$

d) $\frac{4}{5} + \frac{3}{10}$

f) $\frac{9}{40} + \frac{7}{30}$

● Calcul 6.4 — Quelques différences.



Effectuer les calculs suivants. On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

c) $\frac{-5}{2} + 3$

e) $\frac{7}{-4} + \frac{5}{6}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{-2}{3}$

d) $-\frac{4}{5} + \frac{-3}{10}$

f) $\frac{-9}{-40} - \frac{7}{-30}$

● **Calcul 6.5 — Quelques produits.**



Effectuer les calculs suivants. *On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.*

a) $\frac{2}{5} \times \frac{7}{3}$		c) $\frac{-5}{6} \times \frac{7}{-4}$	
b) $\frac{10}{7} \times \frac{-3}{4}$		d) $-\frac{6}{-7} \times \frac{-10}{3}$	

● **Calcul 6.6 — Quelques quotients.**



Effectuer les calculs suivants. *On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.*

a) $\frac{2}{5} \div \frac{7}{3}$		e) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$	
b) $\frac{10}{7} \div \frac{-3}{4}$		f) $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{3}}$	
c) $\frac{-5}{6} \div \frac{7}{-4}$		g) $\frac{4}{\frac{7}{3}}$	
d) $-\frac{6}{-7} \div \frac{-10}{3}$		h) $\frac{\frac{-11}{8}}{\frac{-7}{5}}$	

Calculs plus avancés

● **Calcul 6.7**



Effectuer les calculs suivants. *On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.*

a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{6}$		d) $\frac{2}{7} + \frac{3}{5} \div \frac{14}{3}$	
b) $\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{7}{6}$		e) $\frac{4}{9} \times \frac{-3}{11} - \frac{7}{4} \times \frac{-2}{-11}$	
c) $\frac{3}{4} - \frac{5}{2} \times \frac{1}{3}$		f) $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{-4} + \frac{1}{6}\right)$	

● **Calcul 6.8**



Effectuer les calculs suivants. *On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.*

a) $\frac{1}{4} - \frac{3}{7} \times \left(\frac{-3}{10} - \frac{1}{5}\right)$		c) $\frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}$	
b) $\frac{\frac{3}{4} + \frac{7}{5}}{\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}}$		d) $\frac{-1 + \frac{2}{9} \times \frac{-3}{5}}{\left(-1 + \frac{2}{9}\right) \times \frac{-3}{5}}$	

● **Calcul 6.9 — Calcul littéral (I).**



Soit x un nombre réel. En considérant qu'elles sont bien définies, calculer les expressions suivantes.

On donnera le résultat sous forme d'une seule fraction.

a) $\frac{3x}{10} - \frac{2}{5} \times \frac{x}{7} + 1$

b) $\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{x}\right) \times \left(\frac{1}{2}x + \frac{-4}{5}\right)$

c) $\frac{-4}{3x-3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{2x+1}{-5} + \frac{7x-1}{10}\right)$

d) $\frac{2 - \frac{3x}{8} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{-2x+1}{4}\right)}{1 + \frac{2x-5}{3} \times \left(\frac{x-2}{8} + \frac{-3x+5}{4}\right)}$

● **Calcul 6.10 — Calcul littéral (II).**



Soit x un nombre réel. En considérant qu'elles sont bien définies, calculer les expressions suivantes.

On donnera le résultat sous forme d'une seule fraction.

a) $\frac{2}{5x+2} - \frac{4x+3}{2x+1}$

b) $\frac{-2x+1}{4-x^2} + 3x + \frac{4}{2-x}$

c) $\frac{2x-1}{5x+2} \times \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{4x}{5x-2}\right)$

d) $\frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$

Calculs plus difficiles

● **Calcul 6.11 — Équations (I).**



Résoudre les équations suivantes. On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{2}{3} - \frac{3}{x} = \frac{8}{5}$

c) $-\frac{5}{7} + \frac{4}{3} \times \frac{x-1}{x} = \frac{-1}{2}$

b) $\frac{2x+5}{x-3} = \frac{-1}{4}$

d) $\frac{1}{2 + \frac{3}{4+x}} = 5$

● Calcul 6.12 — Équations (II).



Résoudre les équations suivantes. On donnera le résultat sous forme d'un ensemble de solutions.

a) $\frac{4x-2}{8} + \frac{15-3x}{12} = \left(x + \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{6}{x} - \frac{5}{x+\frac{1}{3}}\right)$

b) $\frac{10x-5}{4} = \frac{3}{x-1} + \frac{21}{8x+12}$

● Calcul 6.13 — Décomposition en éléments simples.



Déterminer un couple (a, b) permettant de vérifier chacune des propriétés suivantes.

a) Pour tout réel x différent de -1 et 0 , on a $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

b) Pour tout réel x différent de -1 et 1 , on a $\frac{1}{2(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$

● Calcul 6.14 — Une équation à deux inconnues.



Déterminer un couple (a, b) de nombres rationnels tels que $0 < a < 10$, $0 < b < 10$ et $ab = 99$.

.....

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccc}
 \frac{3x^2-6x-77}{60(x-1)} & \frac{1}{4} & \frac{18x^2-15x+192}{-40x^2+164x-64} & \frac{29}{70} & \frac{-3x^3+14x+9}{4-x^2} & \frac{-40}{21} \\
 \frac{1}{2} & \frac{-20x^2-19x-4}{(5x+2)(2x+1)} & \frac{6}{5} & \frac{-9}{35} & \frac{-5}{12} & \frac{12}{7} \\
 \frac{91}{36} & \frac{-29}{66} & \frac{11}{2} & \frac{56}{47} & \left(\frac{999}{100}, \frac{1100}{111}\right) & \frac{-17}{9} \\
 \frac{-3}{7} & \frac{66}{35} & \frac{2}{-7} & \frac{-2}{47} & \{-2, 0, 2\} & 5 \\
 \frac{6}{5} & \frac{4}{21} & (1, -1) & \frac{-1}{12} & \frac{-5}{2} & \frac{-20}{7} \\
 \frac{17x+70}{70} & \frac{43}{21} & \frac{-11}{12} & \frac{5x^2-38x+48}{30x} & \frac{2+x}{3+2x} & \frac{3}{4} \\
 \frac{6}{35} & \frac{5}{6} & \frac{-11}{10} & \frac{14}{15} & \frac{55}{56} & \frac{-17}{3} \\
 & & & & \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) & \frac{10}{21} \\
 & & & & & \{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 150

Fractions de fractions



Savoir calculer avec des fractions de fractions

● Calcul 7.1



Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ou sous forme d'un nombre entier.

a) $\frac{1}{2} \div 3$		c) $\frac{\frac{2}{-3}}{8}$		e) $\frac{\frac{-3}{4}}{-5}$	
b) $3 \div \frac{1}{2}$		d) $\frac{1}{\frac{2}{3}}$		f) $\frac{\frac{-3}{4}}{-5}$	

● Calcul 7.2



Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ou sous forme d'un nombre entier.

a) $(2 + \frac{1}{3}) \div 4$..		c) $\frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{5}}{-2}$		e) $\frac{12}{\frac{1}{6} - \frac{1}{5}}$	
b) $3 \div (-1 + \frac{2}{3})$		d) $\frac{-4}{1 - \frac{3}{4}}$		f) $\frac{13}{\frac{3}{7} - \frac{-9}{5}}$	

● Calcul 7.3



Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ou sous forme d'un nombre entier.

a) $\frac{3 \times \frac{2}{9}}{8}$		c) $\frac{27}{6 \times \frac{5}{4}}$		e) $\frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{4}}{\frac{3}{2} \div \frac{4}{5}}$	
b) $\frac{5 \times \frac{1}{3}}{15}$		d) $\frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}}{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}}$		f) $\frac{\frac{3}{5} \times \frac{20}{6}}{\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}}$	

● Calcul 7.4



Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ou sous forme d'un nombre entier.

a) $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$		c) $\frac{2}{1 - \frac{1}{3}}$	
b) $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$		d) $\frac{2}{1 - \frac{2}{1 - \frac{1}{3}}}$	

● Calcul 7.5



Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ou sous forme d'un nombre entier.

- a) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}$
- b) $\frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{5}}$
- c) $\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} + \frac{7}{8}}$
- d) $\frac{\frac{8}{7} - \frac{6}{5}}{\frac{4}{3} - 2}$
- e) $\frac{(1 + \frac{1}{2})^2}{(1 - \frac{1}{2})^2}$
- f) $\frac{(\frac{11}{5} - 1)(\frac{11}{5} + 1)}{\frac{11}{5}}$

● Calcul 7.6



Soit x un nombre réel. En considérant qu'elles sont bien définies, calculer les expressions suivantes.

On donnera le résultat sous forme d'un quotient.

- a) $\frac{x}{1 + \frac{1}{x}}$
- b) $\frac{1}{x - \frac{1}{x}}$
- c) $\frac{x}{x + \frac{2}{x}}$

● Calcul 7.7



Calculer et donner le résultat sous forme de fraction irréductible ou sous forme d'un nombre entier.

- a) $\frac{\frac{21 \times 3 \times 5 \times 26}{30 \times 27}}{15}$
- b) $\frac{21 \times 3 \times 5 \times 26}{\frac{30 \times 27}{15}}$
- c) $\frac{\frac{2 \times 56 \times 12 \times 55}{-27 \times 80 \times 7}}{36 \times 12^2}$
- d) $\frac{2 \times 56 \times 12 \times 55}{\frac{-27 \times 80 \times 7}{36 \times 12^2}}$

● Calcul 7.8



Soient $x, y \in \mathbb{R}$. En considérant qu'elles sont bien définies, calculer les expressions suivantes.

On donnera le résultat sous forme d'un quotient.

- a) $\frac{1}{x + \frac{3}{x}}$
- b) $\frac{\frac{x}{1 + \frac{1}{x}}}{1 + x}$
- c) $\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$
- d) $\frac{\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x^2-y^2}}$
- e) $x + \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$
- f) $\frac{1}{x - \frac{1}{1 + \frac{x+1}{2-x}}}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{1}{12} & -360 & \frac{18}{5} & \frac{96}{55} & \frac{15}{4} & \frac{46}{45} & \frac{35}{6} & \frac{455}{3} & \frac{x^2}{x+1} & \frac{3}{4x-2} \\ -16 & \frac{x}{x^2-1} & \frac{15}{4} & \frac{1}{15} & 9 & \frac{2xy-x^2}{y-x} & -\frac{1}{12} & -9 & \frac{3}{2} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{20}{12} & 3 & -1 & \frac{x+y}{1} & \frac{30}{41} & \frac{x}{x^2+3} & \frac{91}{135} & \frac{27}{8} \\ \frac{3}{35} & 6 & \frac{x-1}{x+1} & \frac{x^2}{x^2+2} & \frac{1}{9} & \frac{1}{28} & \frac{-11}{11664} & \frac{1}{6} & -25344 & \frac{x^2}{(1+x)^2} \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 154

Fractions d'expressions



Faire du calcul littéral avec des fractions

● Calcul 8.1



Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Écrire sous forme d'une seule fraction simplifiée les expressions suivantes.

a) $1 + \frac{1}{n}$

d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$

b) $1 - \frac{1}{n+1}$

e) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$

c) $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

f) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$

● Calcul 8.2



Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire sous forme d'une seule fraction les expressions suivantes.

a) $1 + \frac{5}{x-2}$ (où $x \neq 2$)

d) $\frac{10}{2x-1} + 3$ (où $x \neq \frac{1}{2}$)

b) $2 + \frac{5}{x-1}$ (où $x \neq 1$)

e) $\frac{7}{9x+2} - 3$ (où $x \neq -\frac{2}{9}$)

c) $3 - \frac{5}{x+25}$ (où $x \neq -25$)

f) $15 - \frac{105}{5x+7}$ (où $x \neq -\frac{7}{5}$) ...

● Calcul 8.3



Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq -2$ et $x \neq 9$. Écrire sous forme d'une seule fraction les expressions suivantes.

a) $\frac{1}{x-9} - \frac{1}{x+2}$

d) $\frac{3x+4}{x-9} - \frac{1}{x+2}$

b) $\frac{3}{x+2} + \frac{8}{x-9}$

e) $\frac{x}{x-9} - \frac{2x-1}{x+2}$

c) $\frac{3x+1}{x+2} - \frac{5x-1}{2x+4}$

f) $\frac{1}{3(x-9)} + \frac{2}{7(x+2)}$

● Calcul 8.4



Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq -2$, $x \neq -1$ et $x \neq 0$.

Écrire sous forme d'une seule fraction simplifiée les expressions suivantes.

a) $\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)}$

b) $\frac{2}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)} - \frac{2}{x(x+2)}$

c) $\frac{3}{x(x+1)} - \frac{4}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+1)(x+2)}$

● Calcul 8.5



Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note $A = n(n+1)$, $B = n(n+1)(2n+1)$ et $C = (n-1)n^2(n+1)$.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\frac{B}{A}$

c) $\frac{B}{C}$

e) $\frac{A^2}{B}$

b) $\frac{C}{A}$

d) $\frac{A^2}{C}$

f) $\frac{AB}{C}$

● Calcul 8.6



Même exercice.

a) $\frac{1}{A} + \frac{1}{B}$

c) $\frac{A+C}{B}$

b) $\frac{A}{B+C}$

d) $\frac{A+B}{C}$

Réponses mélangées

$-\frac{1}{n(n+1)}$	$\frac{11}{(x-9)(x+2)}$	$\frac{-27x+1}{9x+2}$	$\frac{n^2-n+1}{2n+1}$	$\frac{2}{n(2n+1)}$	$\frac{n+1}{n}$
$\frac{n+1}{n-1}$	$\frac{2x+3}{x-1}$	$\frac{(n+1)(2n+1)}{n-1}$	$\frac{1}{x(x+2)}$	$\frac{2(n+1)}{n(n-1)}$	$\frac{75x}{5x+7}$
$\frac{2n+1}{n(n-1)}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n(n+1)}{2n+1}$	$\frac{1}{x(x+1)}$	$\frac{n+2}{(n+1)^2}$	$\frac{n}{n+1}$
$\frac{13x-40}{21(x-9)(x+2)}$	$\frac{1}{n(n-1)}$	$\frac{6x+7}{2x-1}$	$\frac{n-1}{n^2}$	$\frac{11(x-1)}{(x-9)(x+2)}$	$\frac{3x+70}{x+25}$
$\frac{-x^2+21x-9}{(x-9)(x+2)}$	$\frac{1}{(x+1)(x+2)}$	$2n+1$	$\frac{x+3}{2(x+2)}$	$\frac{3x^2+9x+17}{(x-9)(x+2)}$	

► Réponses et corrigés page 157

Comparaison de fractions



S'entraîner à comparer des fractions entre elles

Consigne

Lorsqu'on demande de comparer deux fractions A et B , on demande d'écrire dans le cadre réponse « $A < B$ » ou « $A > B$ » (où A et B désignent les fractions de l'énoncé).

● Calcul 9.1 — En mettant au même dénominateur (I).



Dans chacun des cas suivants, comparer les deux fractions données en les mettant au même dénominateur.

a) $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{8}$. b) $\frac{2}{7}$ et $\frac{1}{3}$. c) $\frac{22}{7}$ et $\frac{25}{8}$ d) $\frac{15}{7}$ et $\frac{33}{15}$

● Calcul 9.2 — En mettant au même dénominateur (II).



Dans chacun des cas suivants, comparer les deux fractions données en les mettant au même dénominateur.

a) $\frac{4}{17}$ et $\frac{3}{13}$ c) $\frac{29}{15}$ et $\frac{23}{12}$
b) $\frac{5}{6}$ et $\frac{11}{14}$ d) $\frac{2450}{500}$ et 4,91

● Calcul 9.3 — Une méthode moins standard !



Dans chacun des cas suivants, comparer les deux fractions données en les mettant au même numérateur.

Par exemple, pour comparer $\frac{7}{13}$ et $\frac{21}{38}$, on utilise que $\frac{7}{13} = \frac{21}{39}$. Comme $39 > 38$, on a $\frac{21}{39} < \frac{21}{38}$.

a) $\frac{28}{103}$ et $\frac{7}{32}$ b) $\frac{81}{121}$ et $\frac{9}{13}$ c) 0,81 et $\frac{9}{11}$

● Calcul 9.4



Dans chacun des cas suivants, comparer les deux fractions données en utilisant les méthodes précédentes.

a) $\frac{15}{35}$ et $\frac{6}{21}$ c) $\frac{2}{75}$ et $\frac{3}{65}$
b) $\frac{210}{49}$ et $\frac{52}{12}$ d) $\frac{120}{189}$ et $\frac{5}{8}$

● Calcul 9.5 — Des entre-deux.



Dans chacun des cas suivants, déterminer un nombre rationnel α vérifiant les inégalités données.

a) $\frac{8}{10} < \alpha < \frac{9}{10}$ c) $\frac{12}{11} < \alpha < \frac{11}{10}$
b) $\frac{67}{10} < \alpha < \frac{68}{10}$ d) $\frac{24}{7} < \alpha < \frac{7}{2}$

● **Calcul 9.6 — Remettre de l'ordre (I).**



Ordonner les nombres donnés dans l'ordre croissant.

- a) $\frac{2}{9}, \frac{4}{15}$ et $\frac{5}{18}$
- c) $\frac{2}{5}, \frac{14}{30}, \frac{5}{12}$ et $\frac{11}{24}$...
- b) $\frac{450}{240}, \frac{9}{5}$ et 1,85
- d) $\frac{16}{7}, \frac{7}{3}$ et 2,3

● **Calcul 9.7 — Remettre de l'ordre (II).**



Ordonner les nombres donnés dans l'ordre croissant.

- a) $\frac{36}{10}, \frac{7}{2}, \frac{86}{25}$ et 3,53
- b) $\frac{7}{8}, \frac{17}{20}, \frac{11}{12}$ et 0,9
- c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

● **Calcul 9.8**



On définit $\max(a, b)$ comme étant le plus grand des deux nombres a et b .

Calculer les valeurs ci-dessous en mettant la fraction finale sous forme irréductible.

- a) $\max\left(\frac{11}{7}, \frac{12}{9}\right) - \max\left(\frac{4}{19}, \frac{2}{9}\right)$...
- b) $\max\left(\frac{1}{2 - \frac{2}{7}}, \frac{14}{23}\right)$

● **Calcul 9.9 — Deux comparaisons plus difficiles.**



Dans chacun des cas suivants, comparer les deux fractions données.

- a) $\frac{1}{1 + \frac{2}{a}}$ et $\frac{1}{1 + \frac{1}{a+1}}$, où $a > 0$
- b) $\frac{3}{3 + \frac{2}{4a+1}}$ et $\frac{2}{2 + \frac{3}{6a+1}}$, où $a > 0$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{2}{9} < \frac{4}{15} < \frac{5}{18} & \frac{28}{103} > \frac{7}{32} & 0,81 < \frac{9}{11} & \frac{9}{5} < 1,85 < \frac{450}{240} & \frac{1}{2} > \frac{3}{8} & \frac{120}{189} > \frac{5}{8} \\ \alpha = \frac{85}{100} \text{ (par exemple)} & \frac{17}{20} < \frac{7}{8} < 0,9 < \frac{11}{12} & \frac{1}{1 + \frac{2}{a}} < \frac{1}{1 + \frac{1}{a+1}} & \frac{4}{17} > \frac{3}{13} \\ \alpha = \frac{97}{28} \text{ (par exemple)} & \frac{86}{25} < \frac{7}{2} < 3,53 < \frac{36}{10} & \frac{81}{121} < \frac{9}{13} & \frac{3}{3 + \frac{2}{4a+1}} > \frac{2}{2 + \frac{3}{6a+1}} \\ \frac{85}{63} > \frac{29}{15} > \frac{23}{12} & \frac{14}{23} > \frac{6}{21} & \frac{15}{7} < \frac{33}{15} & \frac{2}{75} < \frac{3}{65} & \frac{16}{7} < 2,3 < \frac{7}{3} \\ \frac{5}{6} > \frac{11}{14} & \alpha = \frac{241}{220} \text{ (par exemple)} & \alpha = \frac{675}{100} \text{ (par exemple)} & \frac{22}{7} > \frac{2}{8} \\ \frac{2}{5} < \frac{5}{12} < \frac{11}{24} < \frac{14}{30} & \frac{2}{7} < \frac{1}{3} & \frac{210}{49} < \frac{52}{12} & \frac{2450}{500} < 4,91 & \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{1}{3} + \frac{1}{7} < \frac{1}{2} \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 159

Généralités sur les puissances



S'entraîner à la manipulation des règles sur le calcul des puissances

● Calcul 10.1 — Pour commencer.



Soient a et b des réels non nuls, et soient m et n des entiers. Simplifier les expressions suivantes.

a) $a^3 \times a^5$		c) $2^m \times 2^n$		e) $a^5 \times b^5$	
b) $\frac{a^9}{a^2}$		d) $\frac{5^m}{5^4}$		f) $\frac{8^n}{8^m}$	

● Calcul 10.2



Soit m un entier. Simplifier les expressions suivantes.

a) $2^m \times 4$		d) $\frac{9^{-14m}}{3^{7m}}$	
b) $3^m \times 9^5$		e) $8^{5m} \times 4^{-14m}$	
c) $2^{26m} \times 4^{11m}$		f) $9^{46m} \times 27^{-49m}$	

● Calcul 10.3



Soient a et b des réels non nuls, et m et n des entiers. Simplifier les expressions suivantes.

a) $a^4 \times a^3 \times a^{24}$		d) $a^5 \times b^{23} \times a^{-3} \times b^{18}$	
b) $\frac{a^9 \times a^4}{a^8 \times a^7}$		e) $\frac{a^m \times a^2 \times a^{-3}}{a^5 \times a^{2m}}$	
c) $\frac{5^m \times 4^m}{10^m \times 3^m}$		f) $\frac{a^5 \times b^m \times a^{-12} \times b^2}{b^n \times a^4 \times a^{-11}}$	

● Calcul 10.4



Soient m et n des entiers. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\frac{2^m \times 4^2}{8^3 \times 2^n}$		c) $\frac{8^n \times 3^m \times 16}{27 \times 2^n \times 9}$	
b) $\frac{3^m \times 9^n}{27^6}$		d) $81^m \times 25^n \times 3^{6m} \times 125^n$.	

● Calcul 10.5



Simplifier les expressions suivantes. Ici, m et n sont deux entiers et x et y sont deux réels.

a) $\frac{(x^4 \times y^m)^2}{(x^3 \times y^5)^4}$ b) $\frac{x^m \times y^n}{(x^4 \times y^5)^n}$

● Calcul 10.6



Ici, m et n sont deux entiers et x est un réel. Écrire les expressions suivantes sous la forme $(x - a)^b$.

a) $\frac{(x - 5)^m}{(x - 5)^2}$ b) $\frac{(x - 8)^6}{((x - 8)^m)^3}$ · c) $\frac{(x - 5)^5}{((x - 5)^2)^m}$ ·

● Calcul 10.7 — Des quatrièmes proportionnelles (I).



Soient a et b des réels. Déterminer le nombre manquant pour obtenir un tableau de proportionnalité.

a)

a^4	a^8
a^3	

c)

.....	b^{16}
a^{27}	$a^{14} \times b^{27}$

e)

.....	$a^3 \times b^{-4}$
$a^8 \times b^{-2}$	$a^6 \times b$

b)

a^6	a^{-3}
.....	$a \times b$

d)

$a^{197} \times b^{271}$	$a^{350} \times b^{124}$
.....	$a^{75} \times b^{178}$

f)

$a^{17} \times b^7$	$a^9 \times b^{23}$
$a^8 \times b^4$	

● Calcul 10.8 — Des quatrièmes proportionnelles (II).



Soient m et n des entiers. Déterminer le nombre manquant pour obtenir un tableau de proportionnalité.

a)

2^4	2^m
2^5	

c)

.....	$2^m \times 9^n$
$2^{3m} \times 3^n$	$2^{7m} \times 3^{n+3}$

e)

3^m	
3^{5m+2}	3^{8m+5}

b)

2^{3m}	2^8
.....	2^{5m}

d)

$2^m \times 3^n$	$2^{5m+2} \times 3^{2n}$
$2^{18m} \times 3^n$	

f)

2^5	
4^m	2^m

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccc}
 a^{13} \times b^{-11} & a^8 & 2^{m+n} & a^{10} \times b & b^{20} & 2^{2n+4} \times 3^{m-5} & 3^{10m} \times 5^{5n} & 2^{48m} \\
 3^{-55m} & 2^{5-m} & 2^{8m-8} & a^{-2} & 2^{-13m} & 2^{m+2} & a^2 \times b^{41} & 2^{m+1} & 2^{-3m} \times 3^{2n-3} \\
 3^{4m+3} & a^{-6-m} & x^{-4} \times y^{2m-20} & x^{m-4n} \times y^{-4n} & b^{m-n+2} & a^{-78} \times b^{325} & (x-5)^{m-2} & & \\
 a^{31} & (x-8)^{6-3m} & a^7 & (x-5)^{5-2m} & \left(\frac{2}{3}\right)^m & 3^{-35m} & a^7 & 3^{m+10} & \\
 3^{m+2n-18} & a^5 \times b^{-7} & 8^{n-m} & 2^{m-n-5} & 5^{m-4} & 2^{22m+2} \times 3^{2n} & (a \times b)^5 & &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 161

Puissances et fractions



S'entraîner au calcul de puissances apparaissant dans des fractions

● Calcul 11.1



Écrire les fractions suivantes sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$, avec a , b et c entiers.

a) $\frac{2^4 \times 3^5 \times 5^3}{5^2 \times 3^4 \times 2^2}$

c) $\frac{2 \times 3^3}{5 \times 3^2 \times 2^2} \times \frac{3^2 \times 2^4 \times 5^6}{5^3 \times 3}$

b) $\frac{2 \times 3^5 \times 5^5}{5^2 \times 3^2 \times 2^2} \times \frac{3^2 \times 2^6 \times 5^3}{5^2 \times 3 \times 2^2}$

d) $\frac{15^3 \times 2^2 \times 3 \times 25^2}{30^3} \times \frac{6^2 \times 10^2}{4 \times 15}$...

● Calcul 11.2



Écrire les fractions suivantes sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$, avec a , b et c entiers.

a) $\frac{2^4 \times 3^2 \times 5^3}{5^2 \times 3^4 \times 2^3}$

c) $\frac{2^2 \times 3^3}{15 \times 2^2} \times \frac{3^1 \times 2^4 \times 5^2}{5^3 \times 3^0}$

b) $\frac{2 \times 3^3 \times 5^2}{5^7 \times 3^2 \times 2^3} \times \frac{3^3 \times 2^2 \times 5^4}{5^1 \times 3^5 \times 2^2}$

d) $\frac{2^3}{30 \times 6^2 \times 4} \times \frac{12^2}{10^2 \times 5} \times \frac{5^6}{2 \times 3}$..

● Calcul 11.3



Écrire les fractions suivantes sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$, avec a , b et c entiers.

a) $\frac{2^{-4} \times 3^2 \times 5^{-3}}{5^{-2} \times 3^4 \times 2^{-3}}$

b) $\frac{6^{-2} \times 3^{-1}}{15 \times 9^2 \times 2^{-2}} \times \frac{3^1 \times 2^4 \times 5^{-2}}{25 \times 15 \times 3^2}$..

● Calcul 11.4



Écrire les fractions suivantes sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$, avec a , b et c entiers.

a) $\frac{2 \times 3^{-3} \times 5^2 \times (-3)^3 \times 2^2 \times 5^4}{(-5)^{-7} \times 3^2 \times 2^3 \times 5^1 \times 3^5 \times (-2)^{-2}}$

b) $\frac{2^3}{5 \times (6^3 \times 2^2)^2} \times \frac{3^2 \times (4^2)^{-1}}{(-2)^2 \times 5^3} \times \frac{5^6}{2 \times 3}$

● Calcul 11.5



On considère un réel non nul x et un entier n . Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $\frac{(3^n)^2 \times 6^{-n}}{12^{1-n}} \times 2^{2n}$

b) $\frac{(x^n)^3}{x^{n+3}}$

c) $\frac{x \times (2x)^{5n}}{\left(\frac{x}{2}\right)^{-3n} \times ((2x)^2)^{n+1}}$

● **Calcul 11.6**



Écrire les fractions suivantes sous la forme $-2^a \times 3^b \times 5^c$ ou $2^a \times 3^b \times 5^c$, avec a , b et c entiers.

a) $\frac{-2^{-3} \times 3^{-3} \times 5^{-2} \times (-3)^3 \times 2^2 \times 5^4}{(-5)^4 \times 3^{-2} \times 2^3 \times (2^3 \times 3^5)^{-2} \times (-2)^{-2}}$

b) $\frac{2^4}{5 \times (6^3 \times 2^2)^2} \times \frac{9 \times (-2^4)^{-1}}{\frac{3^2}{500}} \times \frac{5^{2 \times 3}}{2 \times 3}$

c) $\frac{2^3}{5 \times (3^3 \times 2^5)^2} \times \frac{9 \times (2^{-3})^{-1}}{2^2 \times (-5^2)} \times \left(\frac{-5^{-1}}{2^{-2} \times 3^3} \right)^{-2}$

● **Calcul 11.7 — Des quatrièmes proportionnelles.**



Dans chaque cas, déterminer le nombre manquant pour obtenir un tableau de proportionnalité.

On donnera la réponse sous forme irréductible.

a)

$\frac{3^2 \times 5}{(3^{-1} \times 5)^{-1}}$	$\frac{3}{2}$
.....	$\frac{45^{-1}}{6^2}$

b)

$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{5}{2^3}$	

c)

$\left(-\frac{3}{2}\right)^3$	
$\frac{1}{5} \times (-3)^2$	$5 \times \frac{12}{15}$

● **Calcul 11.8 — Avec des décimaux.**



Écrire les nombres décimaux suivants sous la forme $-2^a \times 3^b \times 5^c$ ou $2^a \times 3^b \times 5^c$, avec a , b et c entiers.

a) 0,25

d) 0,006

b) 0,2

e) 2,4

c) 0,75

f) 6,25

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccc}
 2^{-2} \times 3 & 2^4 \times 3^{-10} \times 5^{-6} & 2^2 \times 3^{-7} \times 5^{12} & x^{2n-3} & 5^{-1} & -\frac{15}{2} \\
 2^2 \times 3 \times 5 & -2^{-9} \times 3^{-7} \times 5^8 & 2^4 \times 3^{12} \times 5^{-2} & 2 \times 3^2 \times 5^5 & 2^{-2} & \\
 2^3 \times 3^2 \times 5^2 & 10 & \frac{72^n}{12} & 2^{-2} \times 3 \times 5^{-3} & -2^{-10} \times 3^2 \times 5^{-1} & 2^{-1} \times 3^{-2} \times 5^2 \\
 \frac{x^{6n-1}}{4} & 2^{-14} \times 3^{-5} \times 5^2 & 2 \times 3^{-2} \times 5 & 2^2 \times 3 \times 5^{-1} & 2^{-2} \times 5^2 & \\
 2^{-2} \times 3^{-1} \times 5^{-2} & 2^3 \times 3^4 \times 5^4 & 2^4 \times 3^3 \times 5^{-2} & \frac{5}{162} & 2^{-1} \times 3^{-2} \times 5^{-1} &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 163

Application des puissances



S'entraîner à la manipulation des puissances

● Calcul 12.1 — Pour bien commencer.



Calculer chacune des expressions suivantes.

a) $-7 + 3^2$

e) $9^2 - 2 \times (-3)^2$

b) $4^2 - 2^4$

f) $1 - 5 - (-5)^3$

c) $-7^2 + 2 \times 4^3$

g) $2^3 - 2^4 + 2^5$

d) $5^2 - (-2)^3$

h) $11 - 6^2 - (-2)^4$

● Calcul 12.2 — Règles de calcul sur les puissances.

Soient a et b deux réels non nuls. Mettre sous la forme $a^n \times b^p$, avec $n, p \in \mathbb{N}$, les expressions suivantes.

a) $a^5 \times (a \times b)^5$

d) $(a^2 \times b)^2 \times (b^5 \times a)^4$

b) $(a^3 \times b)^2 \times a \times b^3$

e) $((a^4 \times b)^3 \times b^3 \times a^3)^5$

c) $(a \times a^2 \times a^3 + a^6 \times (b-1))^3$

f) $((a \times b^2)^3)^4 \times a^2$

● Calcul 12.3 — Décomposition de nombres gigantesques.



Décomposer chacun des nombres suivants en produits de facteurs premiers en utilisant les règles de calcul sur les puissances.

a) 24^2

d) 280^{100}

b) 100^{13}

e) $20^3 \times 56^3 \times 21^5$

c) 90^6

f) $44^{44} + 44^{45}$

● Calcul 12.4 — Factoriser (I).



Factoriser au maximum les expressions suivantes en utilisant les règles de calcul sur les puissances.

a) $2^{13} + 2^{14}$

c) $5^{26} - 25^{14} + 125^9$

b) $3^{25} + 27^8 + 9^{13}$

d) $20^{30} \times 5^{12} - 2^{40} \times 50^{20}$...

● **Calcul 12.5 — Factoriser (II).**



Factoriser au maximum les expressions suivantes en utilisant les règles de calcul sur les puissances.

a) $2^{17} \times 12^{14} - 32^8 \times 3^{17}$

b) $(-64)^3 - 5 \times 16^5 + 9 \times 4^{10}$

● **Calcul 12.6**



Dans chacun des cas suivants, déterminer si le nombre est positif ou négatif.

a) $-(-83,4)^{-1}$ b) $(-2)^{-1} + 0,2$... c) $-(-4)^{-1} + 0,4$..

● **Calcul 12.7 — Comparaison.**



Dans chacun des cas suivants, déterminer lequel des deux nombres est le plus petit.

a) 2^{-2} et $(-2)^2$ d) $\left(\frac{1}{3-2}\right)^{-1}$ et 2^{-3}

b) 3^{-3} et 26^{-1} e) $(-6)^{-2}$ et $-(6^{-2})$

c) $(-2^{-1})^{-1}$ et -1 f) $(-2)^{-3}$ et $-(2^{-1})^3$

● **Calcul 12.8 — Écriture scientifique de nombres.**



Donner l'écriture scientifique de chacun des nombres ci-dessous.

a) $c_0 = 299\,000\,000$ c) $h = 0,006\,626 \times 10^{-31}$

b) $\Delta\mu = 9\,192 \times 10^6$ d) $N_A = 0,000\,060\,2 \times 10^{28}$

● **Calcul 12.9 — QCM.**



Quelle est l'écriture scientifique du nombre $0,1^3 \times (200)^4 \times (-0,01)^2$?

- (a) 8×10^{-2} (b) $1,6 \times 10^2$ (c) 8×10^2 (d) $1,6 \times 10^{-2}$ (e) 2×10

.....

Réponses mélangées

positif	il y a égalité	$a^{98} \times b^{168}$	négatif	$c_0 = 2,99 \times 10^8$	$2^{40} \times 3^{14} \times 5$		
79	$2^6 \times 3^{12} \times 5^6$	$a^{18} \times b^3$	-41	$-(6^{-2})$	$h = 6,626 \times 10^{-34}$	2	
$2^{15} \times 3^5 \times 5^3 \times 7^8$		-19×5^{26}	$2^{26} \times 5^{26}$	$N_A = 6,02 \times 10^{23}$	0	33	63
121	(b)	$a^7 \times b^5$	$(\frac{1}{3-2})^{-1}$	$2^{63} \times 3 \times 5^{40}$	3×2^{13}	$2^{300} \times 5^{100} \times 7^{100}$	
$a^{75} \times b^{30}$	3^{-3}	$4^9 \times 15$ ou $2^{18} \times 15$	$(-2^{-1})^{-1}$	2^{-2}	positif	24	
13×3^{24}	$a^8 \times b^{22}$	$a^{10} \times b^5$	$2^6 \times 3^2$	$2^{88} \times 3^2 \times 5 \times 11^{44}$	$\Delta\mu = 9,192 \times 10^9$		

► Réponses et corrigés page 165

Bilan et approfondissement sur les puissances



Acquérir la maîtrise des calculs avec des puissances

Généralités sur les puissances

● Calcul 13.1 — À la recherche du signe.



Déterminer le signe des nombres suivants.

a) $-5^4 \times (-3)^2 \times (-1)^7 \dots\dots$

c) $\frac{4^2 \times (-5)^3}{(-7^3)^5} \dots\dots\dots$

b) $-(-1)^7 \times (-3)^4 \times (-5^7) \dots\dots$

d) $-\frac{((-3)^3)^2 \times (-5^3)}{((-7)^3)^5} \dots\dots$

● Calcul 13.2 — Vrai ou faux ?



Dire si les égalités suivantes sont « vraies » ou « fausses ».

a) $2^{-4} = -16 \dots\dots\dots$

c) $5^9 + 5^9 + 5^9 + 5^9 + 5^9 = 5^{10} \dots\dots$

b) $\frac{1}{5^{-3}} = 5^3 \dots\dots\dots$

d) $\frac{5^4}{5^{-3}} = 5^1 \dots\dots\dots$

● Calcul 13.3 — Vrai ou faux ?

Soit n un entier tel que $n \geq 2$, et soient a et b deux réels non nuls.

Dire si les égalités suivantes sont « vraies » ou « fausses ».

a) $2^{n+1} - 2^n = 2^n \dots\dots\dots$

c) $(a^b)^n = a^{b^n} \dots\dots\dots$

b) $2^{2n} = 4^n \dots\dots\dots$

d) $(ab)^n = a^n b^n \dots\dots\dots$

● Calcul 13.4 — En écriture scientifique.

Écrire en notation scientifique les nombres suivants (*par exemple, on a : $314\,100 = 3,141 \times 10^5$*).

a) $1\,234\,567 \dots\dots\dots$

c) $74,925 \times 10^{-3} \dots\dots\dots$

b) $0,001\,2 \dots\dots\dots$

d) $2,5 \times 10^4 \times 4 \times 10^{-12} \dots\dots$

● **Calcul 13.5 — Quel est le plus grand ?**



Dans chacun des cas, dire quel est le plus grand des deux nombres.

- | | |
|--|--|
| a) 8^{15} ou 2^{46} ? <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> | c) $25^6 \times 8^4$ ou 10^9 ? <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> |
| b) 3^{-44} ou 27^{-15} ? <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> | d) $4^{-3} \times 125^{-2}$ ou 10^{-5} ? ... <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> |

● **Calcul 13.6 — En puissance de deux.**



Écrire les nombres suivants sous la forme 2^n , avec n entier relatif.

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{8 \times 2^7}{4^3}$ <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> | c) $\frac{4^{-3} \times 16^3}{(2^{-1})^4 \times 8^5}$ <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> |
| b) $128^3 \times (16^3)^{-2}$ <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> | d) $\frac{-4^5 \times (-4)^7}{(4^3)^{-2}}$ <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> |

● **Calcul 13.7 — Des mélanges de puissances.**



Écrire les nombres suivants sous la forme d'une seule puissance.

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{10^2 \times (4^3)^3}{25}$ <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> | c) $\frac{9^4 \times 4^7}{2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4}$ <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> |
| b) $\frac{7 \times 2^9 \times 21^6}{14^5 \times 6^4}$ <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> | d) $\frac{25^8 \times (\frac{1}{2^{-3}})^{-2}}{10^5}$ <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> |

● **Calcul 13.8 — Puissances de 2, 3 et 5.**



Écrire les nombres suivants sous la forme $2^n \times 3^m \times 5^p$, avec n, m et p entiers relatifs.

- | |
|---|
| a) $\frac{5^2 \times 10^{-3} \times 6^4}{4^{-2} \times 3^{-1}}$ <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> |
| b) $\frac{(-3)^{-4} \times 25^7 \times (-18)^2}{15^2 \times 12^{-3}}$ <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> |
| c) $\frac{(2^5)^{-3}}{\frac{3^{-5} \times 5^7}{10^8}} \times 9^{-2}$ <input style="width: 100px; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"/> |

Du calcul littéral et des puissances

● Calcul 13.9



Soit n un entier naturel.

Écrire les nombres suivants sous la forme d'une seule puissance, où l'exposant dépendra de n .

a) $\frac{(-2)^{4n} \times 2^{n+1}}{4^{2n-1}}$

b) $\frac{(-5)^{2n} \times 25^3 \times 16^n}{20^{2n} \times 5^{1-3n}}$

● Calcul 13.10



Soit x un réel non nul.

Écrire les nombres suivants sous la forme d'un carré.

a) $3x^3 \times 12x^5$

c) $(-2x)^{-4} \times x^6$

b) $\frac{8x^5}{x^{-3} \times (2x^2)^3}$

d) $\frac{(9x^3)^{-1} \times x^4}{x^3}$

● Calcul 13.11 — Puissances de a et b .



Soient a et b deux réels non nuls.

Écrire les nombres suivants sous la forme $a^m \times b^n$, avec m et n entiers relatifs.

a) $\left(\frac{a^3}{b^{-5}}\right)^{-1} \times a^2 b^7$

c) $\frac{(b^3 a)^3 \times b^{-5}}{(a^2 b^{-1})^2}$

b) $\frac{(a^2 b)^3 \times b^{-4}}{(a^{-2} \times b^2)^{-1}}$

d) $\frac{a^2 b^{-1}}{(a^3)^{-4} \times \frac{(ab^5)^3}{ba^2}}$

● Calcul 13.12



Soient a et b deux réels non nuls, et soit n un entier naturel.

Écrire l'expression suivante sous la forme $a^k \times b^p$, avec k et p entiers relatifs dépendant de n .

a) $\frac{(a^{2n})^{-1} \times b^{n+2}}{(ab^n)^2}$

c) $\frac{(ab^{n+1})^2 \times a^{2n}}{a^{n+2} \times \frac{1}{b^{n-2}}}$

b) $\frac{ab \times (a^3 b^2)^n}{(a^2 b)^{2n+1}}$

d) $\frac{a^{1-n} b^{2n}}{b^n \times \frac{1}{\frac{ab^2}{a^{3n-1}}}}$

Calculs plus difficiles

● Calcul 13.13 — Puissances de a , b et c .



Soient a , b et c trois réels non nuls, et soit n un entier naturel.

Écrire les nombres suivants sous la forme $a^k \times b^p \times c^r$, avec k , p et r entiers relatifs.

a) $\frac{(a^{n+3}b^{2-n}c)^{-1} \times a^{1-3n}}{ab^{4-n}c^{2n}} \dots$		c) $\frac{a^n b c^{1-n} \times (ab^n)^2}{a^{4-n} \times \frac{c}{(ab^{n+1})^3}} \dots$	
b) $(a^2 b^{n-3} c)^2 \times \frac{b^{1-3n}}{c^{-n} a^{n-1}} \dots$		d) $\frac{((a^2)^n)^{-1} \times c^{3-n}}{\frac{b^n c^{-1}}{a^{1-4n} \times \frac{b^3}{ac^n}}} \dots$	

● Calcul 13.14 — Calcul astucieux.



Écrire le nombre suivant sous la forme 3^k , avec k entier relatif.

$$\frac{(3^3 + 3^3 + 3^3)(6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6)}{2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5} \dots$$

● Calcul 13.15 — Un autre calcul astucieux.



Soit n un entier relatif. Écrire le nombre suivant sous la forme 3^k , avec k un entier relatif.

$$\left(\frac{9^{2n} - 5 \times 9^{2n-1}}{3^{4n+1} + 3^{4n}} \right)^2 \dots$$

Réponses mélangées

vrai	$\left(\frac{1}{3x}\right)^2$	$a^{-4n-3}b^{2n-6}c^{-2n-1}$	3^{11}	—	$a^{-n-1}b^0$	$a^{-2n-2}b^{-n+2}$
$a^{2n+1}b^{5n+4}c^{-n}$	—	2^{-5}	2^{20}	2^{46}	$2^5 \times 3^5 \times 5^{-1}$	vrai
21^2	vrai	$a^{-1}b^2$	2^4	vrai	$2^8 \times 3^1 \times 5^{12}$	$7,4925 \times 10^{-2}$
2^{-3}	faux	$a^{13}b^{-15}$	x^2	6^8	$2^{-7} \times 3^1 \times 5^1$	3^{-44}
10^{-5}	faux	$(6x^4)^2$	$1,2 \times 10^{-3}$	$a^{-1}b^6$	1×10^{-7}	faux
$25^6 \times 8^4$	a^4b	$a^{-n+5}b^{-n-5}c^{n+2}$	$\left(\frac{5}{2}\right)^{11}$	$\left(\frac{x}{4}\right)^2$	$1,234567 \times 10^6$	$a^n b^{3n}$

► Réponses et corrigés page 167

Calculs avec des racines I



S'entraîner au calcul avec des racines carrées

● Calcul 14.1



Combien vaut $\sqrt{100 - 36}$?

(a) 4

(b) $\sqrt{4}$

(c) $\sqrt{8}$

(d) 8

(e) -8

.....

● Calcul 14.2 — Possible ou non ?



Dans chacun des cas suivants, dire si, « oui » ou « non », le calcul est possible.

a) $\sqrt{-36}$

c) $\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}$

e) $\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}}$

b) $\sqrt{(-15)^2}$

d) $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$

f) $\sqrt{\frac{2-6}{5-8}}$

● Calcul 14.3



Calculer :

a) $\sqrt{\sqrt{81}}$

c) $\sqrt{5^4}$

e) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$..

b) $\sqrt{1 + \sqrt{1}^2}$

d) $\sqrt{(-3)^4}$

f) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$..

● Calcul 14.4



Calculer :

a) $\frac{30}{\sqrt{25} - \sqrt{100}}$

c) $\sqrt{3^2 + 4^2}$

b) $\sqrt{49} \times \sqrt{100}$

d) $\sqrt{\sqrt{12} + 4}$

● Calcul 14.5 — En passant par une écriture intermédiaire.



En remarquant que $400 = 4 \times 10^2 = 2^2 \times 10^2$, on trouve que $\sqrt{400} = 2 \times 10 = 20$.

En procédant de même, calculer :

a) $\sqrt{10\,000}$

c) $\sqrt{0,36}$

b) $\sqrt{0,01}$

d) $\sqrt{0,0009}$

● Calcul 14.6



Calculer, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible :

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $(-5\sqrt{16})^2$ | <input type="text"/> | d) $-\sqrt{15} \times \sqrt{6} \times \sqrt{10}$ | <input type="text"/> |
| b) $\sqrt{\sqrt{3}^4}$ | <input type="text"/> | e) $\sqrt{2^4 \times 3^2}$ | <input type="text"/> |
| c) $-2\sqrt{3} \times 9\sqrt{3} + 5\sqrt{5} \times (-2\sqrt{5})$.. | <input type="text"/> | f) $\sqrt{\frac{25}{(-7)^2}}$ | <input type="text"/> |

● Calcul 14.7 — Des encadrements.



Encadrer les nombres suivants par deux entiers consécutifs.

- | | | | | | |
|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $\sqrt{2}$ | <input type="text"/> | c) $\sqrt{58}$ | <input type="text"/> | e) $2\sqrt{3}$ | <input type="text"/> |
| b) $\sqrt{150}$ | <input type="text"/> | d) $\sqrt{91}$ | <input type="text"/> | f) $-3\sqrt{2}$ | <input type="text"/> |

● Calcul 14.8



Développer et réduire, en donnant les résultats sous la forme la plus simple possible :

- | | |
|--|----------------------|
| a) $1 - \sqrt{3} - 6\sqrt{3}(-2 + 3\sqrt{3})$ | <input type="text"/> |
| b) $-4 + 20\sqrt{13} + \sqrt{13}(-7 + 2\sqrt{13})$ | <input type="text"/> |

● Calcul 14.9



Développer et réduire, en donnant les résultats sous la forme la plus simple possible :

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $(-2 + 3\sqrt{7})(\sqrt{7} - 1)$ | <input type="text"/> | c) $(-5\sqrt{2} + 3)^2$ | <input type="text"/> |
| b) $(2 - \sqrt{11})(2 + \sqrt{11})$ | <input type="text"/> | d) $\frac{4}{3}(-3 + 6\sqrt{5})^2$ | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

-6	non	2	$-53 + 11\sqrt{3}$	$\frac{5}{7}$	oui	$23 - 5\sqrt{7}$	$22 + 13\sqrt{13}$
$59 - 30\sqrt{2}$	0,6	-7	0,03	non	oui	$3 < 2\sqrt{3} < 4$	$9 < \sqrt{91} < 10$
9	$12 < \sqrt{150} < 13$	3	-30	-104	3	$252 - 48\sqrt{5}$	5
$1 < \sqrt{2} < 2$	oui	$-5 < -3\sqrt{2} < -4$	$7 < \sqrt{58} < 8$	oui	100		
$\sqrt{3} - 1$	$\sqrt{2} - 1$	0,1	400	(d)	12	2	70 25

► Réponses et corrigés page 170

Calculs avec des racines II



Approfondir les techniques de calcul avec des racines carrées

● Calcul 15.1


Calculer, en donnant le résultat sous la forme « $a\sqrt{b}$ », avec a et b entiers (b étant le plus petit possible).

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$ | <input type="text"/> | d) $\sqrt{5} \times \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1}$ | <input type="text"/> |
| b) $2\sqrt{2} \times (-5\sqrt{32})$ | <input type="text"/> | e) $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{6}$ | <input type="text"/> |
| c) $-\sqrt{40} \times 2\sqrt{5^2 - 15}$ | <input type="text"/> | f) $\frac{-4\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \times \sqrt{\frac{20}{3}}$ | <input type="text"/> |

● Calcul 15.2 — Simplification de racines.


Calculer, en donnant le résultat sous la forme « $a\sqrt{b}$ », avec a et b entiers (b étant le plus petit possible).

- | | | | | | |
|---------------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|
| a) $\sqrt{12}$ | <input type="text"/> | d) $\sqrt{60}$ | <input type="text"/> | g) $\sqrt{75}$ | <input type="text"/> |
| b) $\sqrt{28}$ | <input type="text"/> | e) $\sqrt{52}$ | <input type="text"/> | h) $\sqrt{150}$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{10\,000}$ | <input type="text"/> | f) $\sqrt{200}$ | <input type="text"/> | i) $\sqrt{80}$ | <input type="text"/> |

● Calcul 15.3


Calculer, en donnant le résultat sous la forme « $a + b\sqrt{c}$ », avec a, b, c entiers et c le plus petit possible.

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $\sqrt{18} - \sqrt{8}$ | <input type="text"/> | c) $\sqrt{27} + 5 + 2\sqrt{75} - 2\sqrt{81}$ | <input type="text"/> |
| b) $\sqrt{80} - 4\sqrt{125} + 9\sqrt{20} - \sqrt{45}$ | <input type="text"/> | d) $-5\sqrt{28} + 6\sqrt{63} - 4\sqrt{700}$ | <input type="text"/> |

● Calcul 15.4



Développer et réduire, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible.

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $(1 - 3\sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5})$ | <input type="text"/> | b) $(3\sqrt{7} - 2)(5 + 6\sqrt{7})$ | <input type="text"/> |
| c) $(-\sqrt{2} + \sqrt{3})(5 - 3\sqrt{2})$ | <input type="text"/> | | |
| d) $(-2\sqrt{8} + \sqrt{12})(\sqrt{2} - 5)$ | <input type="text"/> | | |

● Calcul 15.5



Développer et réduire, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible.

a) $(-1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 2)(-\sqrt{2} + 5)$

b) $(-1 + \sqrt{5})(2\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} + \sqrt{5})$

● Calcul 15.6



Développer et réduire, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible.

a) $(\sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})$

b) $(-4\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5})(4\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2\sqrt{5})$

● Calcul 15.7 — Avec des fractions.



Calculer, en donnant le résultat sans racine carrée au dénominateur.

a) $\frac{-5}{\sqrt{7}}$

c) $\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{18}}$

e) $\frac{-5}{\sqrt{7}} + \frac{7}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{\sqrt{12} \times \sqrt{7}}{\sqrt{15}}$...

f) $\frac{3}{2\sqrt{5}} - \frac{5}{2\sqrt{3}}$..

● Calcul 15.8 — Des quatrièmes proportionnelles.



Dans chaque cas, déterminer le nombre manquant pour obtenir un tableau de proportionnalité.

On donnera la réponse sans racine au dénominateur.

a)

$\sqrt{3}$	$5\sqrt{2}$
.....	$\sqrt{2}$

b)

$-\sqrt{7}$	$\sqrt{2}$
$3\sqrt{2}$	

c)

$-\sqrt{3}$	$\sqrt{2} - 1$
$\sqrt{3} - \sqrt{2}$	

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{3 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{3} & 6 - 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{6} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{-25\sqrt{3} + 9\sqrt{5}}{30} & \frac{5\sqrt{3}}{3} & 5\sqrt{3} & & \\ -32\sqrt{7} & -27 + 24\sqrt{6} - 8\sqrt{15} & -\sqrt{5} & -40 & \sqrt{2} & -2 + 5\sqrt{2} & & \\ 116 + 3\sqrt{7} & \sqrt{3} & 10\sqrt{2} & 100 & 2\sqrt{7} & -8\sqrt{2} & 31 - 5\sqrt{5} & \frac{\sqrt{3}}{5} \\ 2\sqrt{15} & 1 + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} & \frac{49\sqrt{5} - 25\sqrt{7}}{35} & 2\sqrt{5} & 6 & 6 + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{5} & & \frac{-5\sqrt{7}}{7} \\ -13 + 13\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \frac{2}{5}\sqrt{35} & 2\sqrt{13} & 4\sqrt{5} & -80 & \frac{-8 + 20\sqrt{2}}{-10\sqrt{3} + 2\sqrt{6}} & -\frac{6\sqrt{7}}{7} \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 172

Méthode de la quantité conjuguée



Obtenir une fraction sans racine carrée au dénominateur

● Calcul 16.1 — Présentation de la méthode.



On considère la fraction :

$$\frac{1}{1 - \sqrt{2}},$$

dont on souhaite faire disparaître la racine carrée du dénominateur.

L'idée, pour cela, est de multiplier astucieusement le numérateur et le dénominateur par $1 + \sqrt{2}$.

On dit alors qu'on a appliqué *la méthode de la quantité conjuguée*.

a) Calculer $(1 - \sqrt{2}) \times (1 + \sqrt{2})$

b) En suivant la méthode indiquée, simplifier la fraction comme souhaité.

● Calcul 16.2 — Des premiers calculs.



En appliquant la méthode de la quantité conjuguée, faire disparaître les racines carrées des dénominateurs des fractions suivantes.

a) $\frac{1}{2 + \sqrt{7}}$

c) $\frac{5}{\sqrt{3} + 2}$

b) $\frac{1}{-4 + \sqrt{2}}$

d) $\frac{4}{-2 - \sqrt{11}}$

● Calcul 16.3



Même consigne.

a) $\frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$

c) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}$

d) $\frac{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{2} + \frac{1}{2}}$

● Calcul 16.4



Même consigne.

a) $\frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

c) $\frac{-6}{3\sqrt{2} + \sqrt{15}}$

b) $\frac{5}{\sqrt{17} - 2\sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12} - \sqrt{3}}$

● Calcul 16.5



Faire disparaître les racines carrées des dénominateurs des expressions suivantes, sans se soucier de leur domaine de validité.

a) $\frac{2}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

b) $\frac{\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}-3}$

● Calcul 16.6 — Des quatrièmes proportionnelles.



Dans chaque cas, déterminer le nombre manquant, sans racine au dénominateur, pour obtenir un tableau de proportionnalité.

a)

$\frac{3}{1+\sqrt{3}}$	
$\frac{1+\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2}{1-\sqrt{3}}$

c)

$\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
.....	$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

e)

.....	$\frac{2a+2}{1+\sqrt{2}}$
$\frac{a+1}{1-\sqrt{2}}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{a+1}$

b)

$\frac{2-\sqrt{3}}{5}$	$\frac{10}{2+\sqrt{3}}$
$\frac{3}{2-\sqrt{3}}$	

d)

$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$	
$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$	$\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

f)

$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{a}$	$\frac{b}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
$\frac{a+b}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$	

● Calcul 16.7 — Plus dur !



Faire disparaître les racines carrées des dénominateurs des fractions suivantes.

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

b) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

● Calcul 16.8 — Plus long !



Exprimer sous la forme $a + b\sqrt{2}$, avec a et b deux nombres rationnels.

a) $2 - \frac{3}{4 - \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}}$

b) $2 - \frac{2}{3 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}+1}}}$..

Réponses mélangées

$\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$	$\sqrt{17}+2\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{7}-2}{3}$	$6(1-\sqrt{3})$	$4-2\sqrt{2}$	$ab(a+b)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
$\frac{3\sqrt{2}-2}{7}$	$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$	$-9+5\sqrt{3}$	$\frac{8-3\sqrt{2}}{4}$	$4(\sqrt{3}+\sqrt{2})$	$\frac{4(2-\sqrt{11})}{7}$	
$-2(3\sqrt{2}-\sqrt{15})$	$\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	$2(a+1)^3(1-\sqrt{2})$	-1	$\frac{5+\sqrt{5}}{4}$	
$\frac{9-4\sqrt{2}}{7}$	$5(2-\sqrt{3})$	$-1-\sqrt{2}$	$150(2+\sqrt{3})$	$\frac{8x^2+3\sqrt{x}}{64x^3-9}$	$-\frac{4+\sqrt{2}}{14}$	$4(2+\sqrt{2})$

► Réponses et corrigés page 174

Bilan et approfondissement sur les racines carrées



Consolider et approfondir la maîtrise des racines carrées

S'entraîner aux techniques fondamentales

● Calcul 17.1 — Que de radicaux !



Calculer les quantités suivantes, en donnant le résultat sous la forme d'un entier.

a) $\sqrt{44 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}$

b) $\sqrt{\sqrt{10^2 - 8^2} + 4\sqrt{5^2 - 3^2} + 2\sqrt{\frac{9}{4}}}$

● Calcul 17.2



Calculer les quantités suivantes, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible.

a) $\sqrt{\frac{3}{7}} \times \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{12}}$ b) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{27}} \times \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{10}}$

● Calcul 17.3 — Avec des identités remarquables.



Calculer les quantités suivantes, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible.

a) $(3\sqrt{5} + 5\sqrt{2})^2$ c) $(3\sqrt{6} - 7)(3\sqrt{6} + 7)$
b) $(2\sqrt{6} - 7\sqrt{10})^2$ d) $(-1 + 3\sqrt{2})^2(\sqrt{2} - 1)^2$

● Calcul 17.4



Calculer, en donnant le résultat sous la forme la plus simple possible :

$(2\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})^2$

● Calcul 17.5



Soit n un nombre entier naturel. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{2^{2n-4} \times 5^{2n+6}}$ c) $\sqrt{\frac{3^{4n}}{9^{2-6n}}} \times \frac{1}{\sqrt{81^n}}$
b) $\sqrt{\frac{2^{8n}}{5^{4n+2}}}$ d) $\sqrt{\frac{25^{2n}}{4^{6n-4}}} \times \frac{\sqrt{64^n}}{\sqrt{125^{2n+2}}}$

● **Calcul 17.6 — Sans radical au dénominateur.**



Calculer les quantités suivantes, en donnant le résultat sans racine au dénominateur et avec un numérateur sous la forme la plus simple possible.

a) $\frac{\sqrt{5}-7}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{6-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} + \frac{5-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

● **Calcul 17.7 — Un calcul mystère.**



Calculer $\frac{1}{\sqrt{5}+2} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}}$

● **Calcul 17.8 — Le nombre d'or.**



On pose $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; c'est le *nombre d'or*.

a) Calculer $\varphi^2 + 2\varphi - 5$

b) Donner une relation entre φ^2 et φ

c) Exprimer $1 + \frac{1}{\varphi}$ en fonction de φ

d) À l'aide de la question précédente, exprimer φ^3 en fonction de φ

e) Écrire φ^7 sous la forme « $a + b\varphi$ » avec a et b entiers.

Calcul littéral et racines carrées

● **Calcul 17.9**



Soit a un nombre réel strictement positif. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{a^3}^4$

c) $\frac{3\sqrt{a^{-2}^4}}{-2\sqrt{a^2}}$

b) $\sqrt{\left(\frac{-1}{a}\right)^4}^{-2}$

d) $\left(\frac{\sqrt{16\sqrt{a}}}{\sqrt{a^{-4}}}\right)^2$

● **Calcul 17.10 — Des racines emboîtées.**



Soit a un nombre réel strictement positif. Simplifier l'expression :

$\sqrt{a^2 \times \sqrt{a^4 \times \sqrt{a^8 \times \sqrt{a^{16}}}}}$

● **Calcul 17.11**



Soit a un réel tel que $a > 1$. Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(5a)^2 - (4a)^2}$

c) $\sqrt{a^2 - (a-1)^2}$

b) $\sqrt{(a^2+1)^2 - (2a)^2}$

d) $\sqrt{(a^2+2)^2 - 4a^2}$

● **Calcul 17.12**



Soit x un nombre réel. Factoriser les expressions suivantes.

a) $2x^2 - 10$

d) $(x+1)^2 - 6$

b) $-3x^2 + 36$

e) $2x^4 - 8$

c) $\frac{1}{3}x^2 - 1$

f) $(3x+2)^4 - 25$

● **Calcul 17.13**



Soit x un réel strictement positif et différent de 1.

En utilisant la méthode de la quantité conjuguée, simplifier les expressions suivantes, jusqu'à ce que le dénominateur ne comporte plus de racine.

a) $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

c) $\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$

b) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$

d) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}-2}$

● **Calcul 17.14 — Des quatrièmes proportionnelles.**



Soit a un réel strictement positif et soit n un entier.

Dans chaque cas, déterminer le nombre manquant pour obtenir un tableau de proportionnalité.

On donnera la réponse sans racine au dénominateur.

a)

$2\sqrt{a} + a$	
$-a\sqrt{a}$	$a - \sqrt{4a}$

b)

$\sqrt{a^{4n}}$	
$-\sqrt{a^n}$	$\frac{1}{\sqrt{a^{7n}}}$

● **Calcul 17.15 — Encore des imbrications !**



Soit a un réel tel que $a > 9$. Exprimer en fonction de a l'expression :

$\frac{\sqrt{\sqrt{a}-3}}{\sqrt{\sqrt{a}+3}} - \frac{\sqrt{\sqrt{a}+3}}{\sqrt{\sqrt{a}-3}}$

Calculs plus difficiles

● Calcul 17.16 — Possible ou non ?



Dans chacun des cas suivants, dire si, « oui » ou « non », le calcul est possible.

a) $\sqrt{(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})}$ b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5} - 2} - 1}$

● Calcul 17.17



a) Déterminer l'unique couple (a, b) d'entiers tel que $(a + b\sqrt{3})^2 = 13 - 4\sqrt{3}$ et $a < 0$. .

b) Dédurre de la question précédente la valeur exacte de $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}}$

c) En procédant de même, donner la valeur exacte de $\sqrt{13 + 4\sqrt{3}}$

d) Exprimer $\frac{1}{\sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}$ sous la forme « $a + b\sqrt{3}$ » avec a et b rationnels.

● Calcul 17.18



a) Soit $x > 0$. Simplifier $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

Réponses mélangées

$\sqrt{n+1} - 1$	$\frac{8}{3}$	$-3(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})$	$-\frac{3}{2}a^{-5}$	$16a^4\sqrt{a}$	$\frac{2^{4n}}{5^{2n+1}}$	a^6
0	a^4	non	$(x + 1 - \sqrt{6})(x + 1 + \sqrt{6})$	$8 + 13\varphi$	$\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$	$\frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}$
$\frac{1}{3}(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$	$\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}$	$1 + 2\sqrt{3}$	3^{6n-2}	$\sqrt{a^4+4}$	$\varphi^2 = 1 + \varphi$	
$2(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$	a^4	$2^{-3n+4} \times 5^{-n-3}$	$\frac{-6\sqrt{a+9}}{a-9}$	7	$-a^{-2n}$	$3 - 2\sqrt{2}$
$2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$	$a^2 - 1$	$16 + 4\sqrt{6} - 4\sqrt{10} - 2\sqrt{15}$	$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x-1}$	$\sqrt{2a-1}$		
$514 - 56\sqrt{15}$	5	$1 + 2\varphi$	non	$\frac{10\sqrt{3} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{15}}{15}$	$\frac{(4-a)\sqrt{a}}{a}$	$\frac{1}{11} + \frac{24}{121}\sqrt{3}$
$\frac{\sqrt{x^2+4}+2}{x^2}$	$\frac{\sqrt{15}-7\sqrt{3}}{3}$	1	$(-1, 2)$	5	$3a$	φ
$\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x^2}$	$\frac{65+3\sqrt{2}+21\sqrt{3}}{7}$	$81 - 56\sqrt{2}$	$-1 + 2\sqrt{3}$	$2^{n-2} \times 5^{n+3}$	$95 + 30\sqrt{10}$	

► Réponses et corrigés page 176

Développement d'expressions I



S'entraîner à développer et réduire des expressions simples

● Calcul 18.1 — Pour commencer.



Développer et réduire les expressions suivantes. *Le résultat est attendu sous la forme « $ax + b$ ».*

a) $2(x + 1)$

d) $10(2x + 3) + 2x$

b) $(x + 3) \times 4$

e) $8(1 + 2x) + 2(3x + 4)$

c) $5(1 + x) + 1$

f) $4(x + 2) + 5(5 + 2x) + 3$..

● Calcul 18.2



Développer et réduire les expressions suivantes. *Le résultat est attendu sous la forme « $ax + b$ ».*

a) $-(2x + 4)$

d) $-5(1 - 2x) - 1$

b) $-3(x - 5)$

e) $(2x - 5) \times (-6)$

c) $-4(-x - 2) + x$

f) $-4(x - 5) - (-2x + 1)$

● Calcul 18.3 — Avec des fractions.



Développer et réduire les expressions suivantes. *Le résultat est attendu sous la forme « $ax + b$ ».*

a) $\frac{1}{2}(2x + 4)$

c) $-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}x - 8\right) - \frac{1}{3}$

b) $\frac{5}{6}(3x - 2) + \frac{1}{3}$

d) $\frac{5}{6}(2 - 3x) - \frac{3}{4}(-2x + 1)$..

● Calcul 18.4



Développer et réduire les expressions suivantes. *Le résultat est attendu sous la forme « $ax^2 + bx + c$ ».*

a) $(2x - 3)(5x + 1)$

c) $2x(6 - 5x) + 3x^2$

b) $-(1 - 5x)(3x + 2)$

d) $x(3x - 5) - 3x(x - 1)$..

● **Calcul 18.5**



Développer et réduire les expressions suivantes. *Le résultat est attendu sous la forme « $ax^2 + bx + c$ ».*

- | | | | |
|--|----------------------|---|----------------------|
| a) $\frac{1}{2}x(4x - 3)$ | <input type="text"/> | c) $\left(\frac{6}{5}x - \frac{4}{3}\right)\left(\frac{15}{4}x - 10\right) - \frac{2}{3}$ | <input type="text"/> |
| b) $\frac{-3}{5}(25x - 10) - x\left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right)$ | <input type="text"/> | d) $\frac{4}{5}\left(10x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8} + 5x\right) \dots$ | <input type="text"/> |

● **Calcul 18.6 — Avec plusieurs variables.**



Développer et réduire au maximum les expressions suivantes.

- | | | | |
|--------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $(3x - 1)(-2y + 3)$ | <input type="text"/> | d) $uv(u - v) - 2(v - u)$ | <input type="text"/> |
| b) $a(-2b + 5) - b(3a + 1)$.. | <input type="text"/> | e) $-\frac{r}{2}(2 - s) - \frac{s}{2}(2 - r)$... | <input type="text"/> |
| c) $(t + z)(2t - 3z)$ | <input type="text"/> | f) $p\left(q - \frac{1}{2}p\right) + \frac{1}{2}p(p - q)$.. | <input type="text"/> |

● **Calcul 18.7 — Avec des racines carrées.**



Développer et réduire les expressions suivantes. *Le résultat est attendu sous la forme « $a\sqrt{b} + c$ ».*

- | | | | |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$ | <input type="text"/> | d) $\left(\sqrt{50} + \frac{1}{3}\right)(9 + 3\sqrt{2})$ | <input type="text"/> |
| b) $4\sqrt{5}\left(\frac{1}{2} - 3\sqrt{5}\right)$ | <input type="text"/> | e) $(\sqrt{18} - 3)\left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ | <input type="text"/> |
| c) $(2\sqrt{7} + 1)(2\sqrt{7} - 2)$ | <input type="text"/> | f) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$.. | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

$\frac{5}{2}x - \frac{4}{3}$	$rs - r - s$	$u^2v - uv^2 - 2v + 2u$	$-5ab + 5a - b$	$46\sqrt{2} + 33$
$\frac{1}{2}pq$	$10x - 6$	$-6xy + 9x + 2y - 3$	$14x + 36$	$-\frac{1}{8}x + \frac{17}{3}$
$15x^2 + 7x - 2$	$-\sqrt{15} + 1$	$-2x$	$\frac{9}{2}x^2 - 17x + \frac{38}{3}$	$-7x^2 + 12x$
$10x^2 - 13x - 3$	$40x^2 - x - \frac{1}{20}$	$\frac{15}{2}\sqrt{2} - 9$	$-2x - 4$	$2t^2 - 3z^2 - tz$
$5x + 8$	$2\sqrt{5} - 60$	$\sqrt{3} + 3$	$2x + 2$	$4x + 12$
$-2x + 19$	$2x^2 - \frac{3}{2}x$	$-2\sqrt{7} + 26$	$22x + 30$	$x + 2$
$-\frac{3}{2}x^2 - \frac{63}{4}x + 6$				

► Réponses et corrigés page 180

Factorisations



Pratiquer la factorisation pour acquérir des réflexes

● Calcul 19.1 — Pour commencer.



Souligner le facteur commun puis factoriser les expressions suivantes.

a) $(x + 5)(2x - 3) + (7x - 4)(2x - 3)$

b) $(x - 7)(7x - 3) + 2(7x - 3)$

c) $(2x - 4)(3x + 7) + 3x + 7$

● Calcul 19.2



Souligner le facteur commun puis factoriser les expressions suivantes.

a) $(2t - 1)(6t - 5) + (3t - 1)(2t - 1)$

b) $(y - 3)(2y - 4) - (y - 3)(4y + 9)$

c) $(3a - \sqrt{2})(4a + 2) - (2a + 5)(3a - \sqrt{2})$

d) $\left(3t - \frac{1}{4}\right)(-2t + 7) - \left(3t - \frac{1}{4}\right)$

● Calcul 19.3 — Le coup du « -1 ».



a) Compléter l'égalité suivante : $4 - \frac{1}{3}x = \boxed{} \times \left(\frac{1}{3}x - 4\right)$

b) En s'aidant de la question précédente, factoriser l'expression $\left(\frac{1}{3}x - 4\right)(x - 8) + \left(4 - \frac{1}{3}x\right)(-3x + 2)$.

.....

En utilisant la même démarche, factoriser les expressions suivantes.

c) $(3t - 1)(t + 4) - (2t + 3)(1 - 3t)$

d) $(9 - 2x)(7x + 4) - (2x - 9)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

● **Calcul 19.4 — À la recherche du facteur commun.**



a) Compléter l'égalité suivante : $(6t - 9) = \boxed{} \times (2t - 3)$

b) En s'aidant de la question précédente, factoriser l'expression $(2t - 3)(7t + 1) + (6t - 9)(2t + 3)$.

.....

En s'inspirant de ce qui précède, factoriser les expressions suivantes.

c) $(x - 7)(2x + 3) + (14 - 2x)(5x + 1)$

d) $3(2x - 5)(x - 7) - (20 - 8x)(x + 3)$

e) $(3x - 1)(7x + 2) + (3x + 5)(-\frac{1}{3} + x)$

● **Calcul 19.5**



Souligner le facteur commun puis factoriser les expressions suivantes.

a) $2(3x - 4)(7x - 1) + 4(7x - 1)(2x + 1)$

b) $5(2t - 1)(t + \sqrt{3}) - 3(2t - 1)(t + 4\sqrt{3})$

c) $3(4z - 1)(z + 2) - (z + 3)(z - 4)(4z - 1)$

● **Calcul 19.6 — Avec des carrés !**



a) Factoriser $(2x + 3)^2 + (2x + 3)(7x - 4)$

b) Factoriser $4(7x - 1)^2 - 3(x + 6)(7x - 1)$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccc} \left(\frac{1}{3}x - 4\right)(4x - 10) & (y - 3)(-2y - 13) & \left(3t - \frac{1}{4}\right)(-2t + 6) & (2x + 3)(9x - 1) \\ (3x + 7)(2x - 3) & (6t - 9) = \boxed{3} \times (2t - 3) & (3a - \sqrt{2})(2a - 3) & (9 - 2x)\left(8x + \frac{13}{3}\right) \\ (2t - 3)(13t + 10) & (2t - 1)(2t - 7\sqrt{3}) & (7x - 1)(14x - 4) & (7x - 1)(25x - 22) \\ \left(x - \frac{1}{3}\right)(24x + 11) & (x - 7)(-8x + 1) & (4z - 1)(-z^2 + 4z + 18) & \frac{1}{3}x - 4 = \boxed{-1} \times \left(4 - \frac{1}{3}x\right) \\ (2x - 3)(8x + 1) & (7x - 3)(x - 5) & (2t - 1)(9t - 6) & (2x - 5)(7x - 9) \quad (3t - 1)(3t + 7) \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 182

Premières identités remarquables



S'entraîner à utiliser les identités remarquables

● Calcul 20.1

Soient x et t deux nombres réels. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(x+1)^2$

c) $\left(3t + \frac{4}{3}\right)^2$

b) $(2x-5)^2$

d) $\left(\frac{3}{2}t - 2\right)^2$

● Calcul 20.2

Soient x, y et t trois nombres réels tels que $y > 0$. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})^2$

c) $\left(\frac{3}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\right)^2$

b) $\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + 1\right)^2$

d) $\left(\sqrt{y} - \frac{1}{y}\right)^2$

● Calcul 20.3

Soient x et y deux nombres réels tels que $y > 0$. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{y}\right)^2$

c) $2(3x+1)^2$

b) $(1 - \sqrt{y})^2$

d) $3 - (1 - 5x)^2$

● Calcul 20.4



Développer et simplifier les expressions suivantes.

a) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

b) $(5\sqrt{3} - 4\sqrt{2})^2$

● Calcul 20.5



Calculer les expressions suivantes, en donnant le résultat sans racine carrée au dénominateur.

a) $\left(3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

b) $\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

d) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2$

● Calcul 20.6



Développer et simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{6})^2$

b) $1 - (\sqrt{5} - \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{7})$..

● Calcul 20.7



Soit t un nombre réel. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $t^2 - (t - 1)^2$

c) $(t^2 + 4)(t - 2)(t + 2)$..

b) $2t^2 - (t - 1)(t + 1)$

d) $(t + 3)(2t - 1)^2$

● Calcul 20.8



Soient a, b et t trois nombres réels tels que $t > 0$. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $\left(\frac{a^2}{2} - b\right)^2$

c) $(2ab + 3bt)^2$

b) $\left(2\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2$

d) $(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$..

● Calcul 20.9



Soient x, y et t trois nombres réels. Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(5xt^2 - 3x^2y^3)^2$

c) $(3x - 2y + 5z)^2$

b) $\left(x + 3y - \frac{1}{2}t\right)^2$

d) $(x + y)^3$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccc}
 107 - 40\sqrt{6} & \frac{y^2}{4} + \frac{1}{y^2} - 1 & 9x^2 + 4y^2 + 25z^2 & 9t^2 + 8t + \frac{16}{9} & 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 & \\
 & & -12xy + 30xz - 20yz & & & \\
 4t^3 + 8t^2 - 11t + 3 & 3 & 25x^2t^4 - 30x^3y^3t^2 & a^6 - b^6 & 2t - 1 & \frac{9}{4}t^2 - 6t + 4 \\
 & & + 9x^4y^6 & & & \\
 5 - 2\sqrt{6} & \frac{9}{2} - 2\sqrt{2} & t^4 - 16 & y - \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{1}{y^2} & x^2 + 2x + 1 & \frac{9}{y} - \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{1}{4} & t^2 + 1 \\
 x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 & \frac{5\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} & 4a^2b^2 + 12ab^2t + 9b^2t^2 & -25x^2 + 10x + 2 & & \\
 \frac{a^4}{4} - a^2b + b^2 & 18x^2 + 12x + 2 & 12 + 9\sqrt{2} & \frac{221}{16} - \frac{3\sqrt{30}}{4} & y - 2\sqrt{y} + 1 & \\
 4x^2 - 20x + 25 & x^2 + 9y^2 + \frac{1}{4}t^2 & 4t + 4 + \frac{1}{t} & \frac{28}{3} + 2\sqrt{3} & \frac{t^2}{2} + \sqrt{2}t + 1 & \\
 & -xt + 6xy - 3yt & & & &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 184

Factorisations à l'aide de $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$



Savoir repérer et appliquer la « troisième identité remarquable »

● Calcul 21.1 — Premières factorisations simples.



Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2 - 3^2$

d) $4x^2 - 36$

b) $x^2 - 25$

e) $49 - 9x^2$

c) $4 - x^2$

f) $-4x^2 + 1$

● Calcul 21.2



Factoriser les expressions suivantes.

a) $36 - (x + 2)^2$

c) $(2x + 1)^2 - (x - 3)^2$

b) $(x + 1)^2 - (x + 3)^2$

d) $-(2 - x)^2 + (5x - 6)^2$...

● Calcul 21.3 — Avec des fractions.



Factoriser les expressions suivantes.

Le résultat doit être donné sous la forme « $c(ax - b)(ax + b)$ » où c est une fraction et où a et b sont des nombres entiers.

a) $\frac{1}{4} - \frac{x^2}{9}$

c) $1 - \frac{1}{36}x^2$

b) $\frac{4}{25}x^2 - \frac{1}{9}$

d) $-\frac{9}{4}x^2 + 25$

● Calcul 21.4 — Avec deux variables.



Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2 - y^2$

c) $(x^2 - y)^2 - (x^2 + y)^2$...

b) $4y^2 - (x + 1)^2$

d) $\frac{1}{4}x^2y^2 - (xy + 1)^2$

● **Calcul 21.5 — Avec une autre identité remarquable.**



Factoriser les expressions suivantes, en utilisant une autre identité remarquable.

a) $9 - (x^2 + 2x + 1)$

b) $(2x + 1)^2 - (x^2 - 2x + 1)$

c) $(1 - 5x)^2 - 4x^2 - 4x - 1$

d) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} - \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^2$

● **Calcul 21.6 — Une factorisation astucieuse.**



On s'intéresse à l'expression $2x^2 - \frac{1}{2}$, qu'on souhaite factoriser.

a) Développer l'expression $\frac{1}{2}(4x^2 - 1)$

b) En déduire une factorisation de $2x^2 - \frac{1}{2}$

● **Calcul 21.7 — On s'entraîne !**



En s'inspirant de l'exercice précédent, factoriser les expressions suivantes.

Le résultat doit être donné sous la forme « $c(ax - b)(ax + b)$ » où c est une fraction et où a et b sont des nombres entiers.

a) $3x^2 - \frac{1}{3}$

c) $7 - \frac{1}{7}x^2$

b) $\frac{1}{5}x^2 - 5$

d) $-\frac{1}{3} + \frac{x^2}{27}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccc}
 (2-x)(2+x) & -7x(2-3x) & \frac{1}{3}(3x-1)(3x+1) & \frac{1}{7}(7-x)(7+x) & \frac{1}{5}(x-5)(x+5) & \\
 (2x-6)(2x+6) & (2y-x-1)(2y+x+1) & (x-3)(x+3) & 3x(x+2) & \frac{1}{2}(2x-1)(2x+1) & \\
 -\frac{1}{36}(2x-3)(2x+3) & (x-y)(x+y) & -\frac{1}{4}(3x-10)(3x+10) & -\frac{1}{36}(x-6)(x+6) & & \\
 2x^2 - \frac{1}{2} & \frac{1}{27}(x-3)(x+3) & -4yx^2 & (4-x)(8+x) & (6x-8)(4x-4) & \\
 (7-3x)(7+3x) & \left(-x - \frac{4}{3}\right)\left(2x + \frac{2}{3}\right) & -2(2x+4) & (x-5)(x+5) & (x+4)(3x-2) & \\
 \frac{1}{225}(6x-5)(6x+5) & (1-2x)(1+2x) & (2-x)(4+x) & \left(-\frac{1}{2}xy-1\right)\left(\frac{3}{2}xy+1\right) & &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 186

Développement d'expressions II



S'entraîner à développer et réduire des expressions plus complexes

● Calcul 22.1



Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(x + 1)(x^2 - 2x + 3)$

b) $(x + y + z)^2$

c) $-(2x^2 - 1)(x^3 + y - 7)$

d) $(\sqrt{5}x + \sqrt{2}y)(\sqrt{2}x - \sqrt{5}y)$

● Calcul 22.2



Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(z + 4)(z - 4)(z^2 + 16)$

b) $(u + \sqrt{2})(u^2 + u\sqrt{2} + 2)$

c) $((1 + \sqrt{2})a - b)(a^2 - (1 - \sqrt{2})b^3)$

● Calcul 22.3 — Des carrés et des carrés de carrés.



Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $((x + 3)(x - 5) + 15)^2$

b) $\left(\left(\frac{1}{2}y - 1\right)^2 - \left(\frac{3}{2}y + 1\right)^2\right)^2$

● Calcul 22.4



Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(x - 1)(1 + x + x^2)$

b) $(v + 1)(1 - v + v^2 - v^3 + v^4)$

● **Calcul 22.5**



Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(t + 3)(-27 + 9t - 3t^2 + t^3)$

b) $(z - \sqrt{2})(4 + 2\sqrt{2}z + 2z^2 + \sqrt{2}z^3 + z^4)$

● **Calcul 22.6**



Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(x - 1)(x + 5)^2$...

c) $(v + 1)^2(v - 2)^2$..

b) $-(u + 3)(u - 4)^2$..

d) $(x + y)^2(x - y)^2$..

● **Calcul 22.7**



Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(x + y)^2 - (x - y)^2$...

b) $(u + 2)^3 - (u - 2)^3$

● **Calcul 22.8**



Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)(x^2 + 2x + 1)$

b) $\left(1 + \frac{2}{z}\right)(z^3 - 3z^2 + z)$

● **Calcul 22.9**



Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

b) $\left(a + \frac{b}{a}\right)\left(b + \frac{a}{b}\right)$...

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 v^4 - 2v^3 - 3v^2 + 4v + 4 & x^4 - 2x^2y^2 + y^4 & 4y^4 + 16y^3 + 16y^2 & 4xy & & & \\
 t^4 - 81 & z^4 - 256 & 12u^2 + 16 & x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} & x^3 + 9x^2 + 15x - 25 & & \\
 ab + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + 1 & z^3 - z^2 - 5z + 2 & v^5 + 1 & -u^3 + 5u^2 + 8u - 48 & & & \\
 \sqrt{10}x^2 - 3xy - \sqrt{10}y^2 & x^3 - 1 & -2x^5 + x^3 - 2x^2y + 14x^2 + y - 7 & & & & \\
 x^3 - x^2 + x + 3 & (1 + \sqrt{2})a^3 + ab^3 - a^2b + (1 - \sqrt{2})b^4 & z^5 - 4\sqrt{2} & x^4 - 4x^3 + 4x^2 & & & \\
 x^2 + x - 1 - \frac{1}{x} & x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz & u^3 + 2\sqrt{2}u^2 + 4u + 2\sqrt{2} & & & &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 188

Relations entre variables



Exprimer une variable en fonction d'autres variables

Remarque

Dans cette fiche, quand on demande d'exprimer une variable en fonction des autres, on ne se souciera pas des conditions éventuelles sur les variables pour que cette écriture soit possible.

● Calcul 23.1 — Pour commencer.



a) On suppose que $U = R \times I$ avec $R \neq 0$. Exprimer I en fonction de U et R

b) On suppose que $M = \frac{a+b+c}{3}$. Exprimer a en fonction de M , b et c

c) On suppose que $a = b \times q + r$ avec $q \neq 0$. Exprimer b en fonction de a , q et r

● Calcul 23.2



Dans chaque cas, exprimer t en fonction de C sachant que :

a) $C = 1 + \frac{t}{100}$

c) $10C + \frac{t}{10} = 34$

b) $C = 1 - \frac{t}{100}$

d) $4C - \frac{3t}{5} = -44$

● Calcul 23.3



a) Sachant que $\left(1 - \frac{t}{100}\right)\left(1 + \frac{t'}{100}\right) = 1$, exprimer t' en fonction de t

b) Sachant que $\left(1 + \frac{t}{100}\right)\left(1 - \frac{t'}{100}\right) = 1$, exprimer t' en fonction de t

c) Sachant que $\left(1 + \frac{t}{100}\right)\left(1 + \frac{u}{100}\right)\left(1 - \frac{t'}{100}\right) = 1$, exprimer t' en fonction de t et u .

.....

● Calcul 23.4



On suppose que $\frac{a}{g} = \frac{g}{b}$ où a , b et g sont des réels strictement positifs. Exprimer :

a) b en fonction de a et g ...

b) g en fonction de a et b ...

● **Calcul 23.5 — Tout en inverse.**



On suppose que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ où p, q, r sont des réels non nuls tels que $p \neq r$. Exprimer :

a) r en fonction de p et q ...

b) q en fonction de p et r ...

● **Calcul 23.6 — Tout en fraction.**



Exprimer x en fonction de y , sachant que :

a) $y = \frac{x+1}{x-1}$

c) $y = \frac{4x-1}{x+5}$

b) $y = \frac{x+2}{1-x}$

d) $y = \frac{\frac{x}{2}-6}{7x+1}$

● **Calcul 23.7 — Avec des carrés.**



Exprimer x en fonction de y , sachant que :

a) $(2x+1)^2 - (2x-3)^2 = y$

c) $\frac{(3x+1)^2 - (3x-4)^2}{y^2+1} = 3$...

b) $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - (x-y)^2 = 1$

d) $y = \frac{3x+1}{(3x-2)^2 - (3x+5)^2}$...

● **Calcul 23.8 — De plus en plus dur !**



Exprimer x en fonction de y , sachant que :

a) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

b) $y + x = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

c) $y = x + \sqrt{x(x+1)}$

d) $y + \sqrt{x-1} = \sqrt{x+1}$

Réponses mélangées

$\frac{y^2}{2y+1}$	$100(C-1)$	$\frac{pq}{p+q}$	$\frac{U}{R}$	$\frac{5y+1}{4-y}$	$\frac{pr}{p-r}$	$-\frac{21y+1}{42y+3}$
$\frac{1+2y^2}{1-y^2}$	$\frac{2-y^2}{2y-2}$	$\frac{y^4+4}{4y^2}$	$\frac{100t}{t+100}$	$340-100C$	$\frac{y}{4} + \frac{1}{3y}$	$\sqrt{ab}$
$\frac{20C+220}{3}$	$100(1-C)$	$\frac{100t}{100-t}$	$\frac{y^2+6}{10}$	$3M-b-c$	$\frac{y+8}{16}$	
$\frac{y-2}{y+1}$	$\frac{g^2}{a}$	$\frac{a-r}{q}$	$\frac{2y+12}{1-14y}$	$\frac{10\,000(t+u)+100tu}{(100+t)(100+u)}$	$\frac{y+1}{y-1}$	

► Réponses et corrigés page 190

Bilan et approfondissement sur les factorisations



Consolider et approfondir les techniques de factorisation

Techniques fondamentales

● Calcul 24.1 — Quelques QCM pour commencer.

a) Quelle est la forme factorisée de $2x + 6$?

(a) $x(2 + 6)$

(b) $2(x + 6)$

(c) $2(x + 3)$

b) Quelle est la forme factorisée de $5x^2 + 15x$?

(a) $5x(x + 3)$

(b) $5(x^2 + 15x)$

(c) $5x(x + 15)$

c) Quelle est la forme factorisée de $x^2 - 9$?

(a) $(x - 3)^2$

(b) $(x - 9)(x + 9)$

(c) $(x - 3)(x + 3)$

● Calcul 24.2 — Avec des facteurs communs.



Factoriser au maximum les expressions suivantes.

a) $(3x + 1)(-4x + 2) - (3x + 1)^2$

b) $(2x - 7)^2 + (3 - 4x)(2x - 7)$

c) $(x - 5)^2 + 5 - x$

d) $(5x - 1)^2 - (2 - 10x)(x + 3)$

● Calcul 24.3 — Identités remarquables.



Factoriser au maximum les expressions suivantes.

a) $x^2 + 14x + 49$

d) $(3x - 7)^2 - 16$

b) $4x^2 + 32x + 64$

e) $36x^2 - 60x + 25$

c) $x^2 + 81 - 18x$

f) $(x - 5)^2 - (5x + 7)^2$..

Avec les identités remarquables

● Calcul 24.4 — Étape par étape.



a) Factoriser $5(x-1)^2 - 20$

b) En déduire une factorisation de $2x^2 - 2 + 5(x-1)^2 - 20$

c) De façon analogue, factoriser $2x^2 - 2 + x^2 + x$

● Calcul 24.5



Factoriser au maximum les expressions suivantes.

a) $x^2 - 25 + (x-1)(x+5)$

b) $(x+2)^2 - (3x+6)(1-x) - x - 2$

c) $2(x-2)(x+1) + x^2 - 4 - 3(1-x)(4-2x)$

● Calcul 24.6 — Forçons les choses.



Factoriser au maximum les expressions suivantes.

a) $x^2 - 2$

c) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$

b) $\frac{x^2}{5} - 1$

d) $2x^2 - 4\sqrt{3}x + 6$

Autres techniques

● Calcul 24.7 — De degré 3.



a) Développer et réduire $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

b) En déduire la forme factorisée de $x^3 - 27$

c) En utilisant la question a), factoriser $x^6 - 27$

d) En utilisant la question a), factoriser $x^9 - 1$

● **Calcul 24.8 — Une astuce.**



a) En remarquant que $3 = 4 - 1$, factoriser au maximum $x^2 - 4x + 3$

b) En remarquant que $27 = 36 - 9$, factoriser au maximum $4x^2 + 24x + 27$

Quelques applications

● **Calcul 24.9 — Simplifications de fractions.**



Simplifier les expressions suivantes.

On ne se souciera pas de leur domaine de définition.

a) $\frac{(x-3)^2 + x^2 - 9}{x-3}$

b) $\frac{x^2 - 16}{(x-2)(x+4)}$

c) $\frac{-2x - 3 + (x-2)(2x+3)}{4x^2 + 12x + 9}$

d) $\frac{x^4 - 1}{(x+1)(x+2)(x^2+1)}$

● **Calcul 24.10 — Factoriser pour calculer plus vite.**



En utilisant des factorisations et en faisant le moins d'étapes possible, donner le résultat de chacun des calculs suivants.

a) $35 \times 215 + 35 \times 785$

b) $10\,001^2 - 9\,999^2$

c) $996 \times 1\,004$

● **Calcul 24.11 — Est-il premier ?**



Soit n un entier supérieur à 2.

a) En vous inspirant du calcul 24.8, factoriser $n^2 + 4n + 3$

b) L'entier $n^2 + 4n + 3$ peut-il être premier ?

● **Calcul 24.12 — Est-il multiple de 52 ?**



L'entier $12^{52} + 12^{53}$ est-il un multiple de 52 ? « Oui » ou « non » ?

On commencera par factoriser cet entier.

Calculs plus difficiles

● Calcul 24.13



Factoriser au maximum chacune des expressions suivantes.

a) $4x + 4y - xz^2 - yz^2$

b) $x^8 - 1$

c) $x^4 - 4x^2 + 4$

d) $9(x+1)^2 - (x-5)^2$

● Calcul 24.14 — Factorisation par blocs.



Le but de cet exercice est de factoriser $(2x-1)^2 - (5x+1)(6x-3) + 8x^2 - 2$.

a) Factoriser au maximum $(5x+1)(6x-3)$

b) Factoriser au maximum $8x^2 - 2$

c) Conclure.

Réponses mélangées

oui $2(x+2)(2x-1)$ $(x-3)(x-1)$ $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^4+3x^2+9)$ $(x+1)(3x-2)$
 $2x$ $3(5x+1)(2x-1)$ 35 000 $\frac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{5}$ $(2x+3)(2x+9)$
 (c) $-2(2x-7)(x+2)$ $(x-3)(x^2+3x+9)$ $(x+7)^2$ $2(x-\sqrt{3})^2$ (a)
 $5(x-3)(x+1)$ $\frac{x-4}{x-2}$ non a^3-b^3 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ $(x-9)^2$
 $-(2x-1)(9x+2)$ $4(x+4)^2$ $2(x+5)(x-3)$ $-8(x+3)(3x+1)$ (c)
 $\left((x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\right)^2$ 999 984 $\frac{x-3}{2x+3}$ $(5x-1)(7x+5)$ $4(x+4)(2x-1)$
 $(x+\sqrt{2})^2$ $3(3x-11)(x-1)$ $\frac{x-1}{x+2}$ $(6x-5)^2$ $(n+1)(n+3)$ $2(2x-1)(2x+1)$
 $(2-z)(2+z)(x+y)$ 40 000 $(x-2)(-3x+10)$ $(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$
 $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ $(x+1)(7x-17)$ $(x-5)(x-6)$ $(3x+1)(-7x+1)$

► Réponses et corrigés page 192

Tableaux de signes et inéquations I



S'entraîner à la résolution d'inéquations produits ou quotients

● Calcul 25.1



Dresser les tableaux de signes des expressions suivantes.

a) $f(x) = (x - 2)(x + 3)$

x	$-\infty$	$+\infty$

b) $g(x) = (7 - x)(10 + x)$

x	$-\infty$	$+\infty$

c) $h(x) = (2x - 3)(7x + 4)$

x	$-\infty$	$+\infty$

● Calcul 25.2 — QCM.



L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(x + 5)(x + 10) > 0$ est :

(a) $] -\infty, -10[\cup] -5, +\infty[$

(c) $] -\infty, 5[\cup] 10, +\infty[$

(b) $] -10, -5[$

(d) $] 5, 10[$

.....

● Calcul 25.3



Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, en utilisant un tableau de signes.

a) $(9 + x)(6 - x) < 0$

b) $(3 - 4x)(5x + 7) \geq 0$

c) $(2x - 7)(x + 9)(5 - x) > 0$

● **Calcul 25.4**



Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes, en utilisant un tableau de signes.

a) $\frac{x+17}{x+11} \leq 0$

c) $\frac{x+4}{3x+6} \geq 0$

b) $\frac{5-7x}{3x+2} < 0$

d) $\frac{(x-4)(3-2x)}{5-x} \geq 0$

● **Calcul 25.5**



Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\frac{9-x}{3x+2} \geq 2$

b) $-1 + \frac{1}{1+x^2} > 0$

● **Calcul 25.6**



a) Factoriser l'expression $A(x) = (x-1)(x+2) - 3(x-1)$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x-1)(x+2) \geq 3(x-1)$

● **Calcul 25.7**



Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

On commencera par factoriser les expressions en question, puis on dressera un tableau de signes.

a) $(x+8)(1-x) > (2x-1)(x+8)$

b) $x^3 - x \leq 0$

c) $49 - (3+x)^2 \leq 0$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}]-\infty, -9[\cup \left[\frac{7}{2}, 5[&]-\infty, -1[\cup [0, 1[& [-17, -11[& \left] -8, \frac{2}{3}[& \emptyset & & \\]-\infty, -10] \cup [4, +\infty[&]-\infty, -9[\cup]6, +\infty[&]-\infty, +\infty[& \textcircled{a} & \left] -\frac{2}{3}, \frac{5}{7} \right] & & \\ \left[\frac{3}{2}, 4 \right] \cup]5, +\infty[&]-\infty, -4[\cup]-2, +\infty[& \left[-\frac{7}{5}, \frac{3}{4} \right] & \left] -\infty, -\frac{2}{3}[\cup \left[\frac{5}{7}, +\infty[& (x-1)^2 & & \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 196

Inéquations du premier degré



S'entraîner à la résolution des inéquations du premier degré

Consigne

Dans toutes les questions où l'on demande de résoudre une inéquation, on donnera les solutions sous forme d'intervalle.

● Calcul 26.1



Le nombre x proposé est-il solution de l'inéquation correspondante ? « oui » ou « non » ?

a) $x = \frac{2}{3}$ et $3x - \frac{4}{7} \leq 2x + \frac{3}{7}$

b) $x = \frac{-5}{7}$ et $-5x + \frac{4}{3} \leq -5x + \frac{-2}{3}$

● Calcul 26.2



Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $x + 5 \leq -2$

c) $x - \frac{5}{4} \leq \frac{-3}{7}$

b) $x - 7 < 3$

d) $x + \frac{2}{3} \leq \frac{11}{-2}$

● Calcul 26.3



Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $3x + 4 \geq -5$

c) $\frac{2}{3}x + \frac{-5}{4} \leq \frac{2}{3}$

b) $-7x + 2 < -3$

d) $\frac{-5}{8}x + \frac{-3}{2} > -\frac{5}{-4}$

● Calcul 26.4



Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $5x - 3 \leq 4x + 2$

b) $3x - 4 > 5x - 7$

c) $6\left(x + \frac{1}{2}\right) < -3(2x + 2)$

d) $\frac{5}{3}\left(\frac{2}{7}x - 1\right) \geq -\frac{3}{2}\left(-x - \frac{7}{2}\right)$

● **Calcul 26.5 — Avec des carrés.**



Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $-3x^2 + x - 3 \leq -3x^2 - 2x + 4$

b) $(x - 5)^2 > (x + 7)^2$

c) $(2x - 3)^2 < (2x + 2)^2 - 4x$

d) $3(2x^2 + 10) < 6(x^2 + 5)$

● **Calcul 26.6 — Avec un paramètre.**



Soit $a < 0$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $ax + 3 \geq a$

b) $-ax + 7 < -a$

c) $7x^2 - 2ax + a \geq 7x\left(x - \frac{1}{x}\right)$

d) $-3x(6x + 4a) < -9x(2x + 4a)$

● **Calcul 26.7**



Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\frac{3x + 1}{4} > \frac{5x + 1}{6}$

b) $\frac{1 - x}{4} - \frac{3x - 2}{2} \leq \frac{2x + 5}{6}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{llll}]-\infty, -\frac{22}{5}[&]-\infty, \frac{7}{3}] &]-\infty, 10[&]-\infty, \frac{23}{8}] \quad \text{non} \quad]\frac{5}{16}, +\infty[\\]-\infty, -\frac{3}{4}[&]-\infty, -\frac{37}{6}] & \text{oui} & [\frac{7+a}{2a}, +\infty[\setminus \{0\} \quad]-\infty, -7] \quad]-\infty, -1[\\]-\infty, \frac{a-3}{a}[&]0, +\infty[&]\frac{5}{7}, +\infty[& [-3, +\infty[\quad \emptyset \quad]-\infty, \frac{3}{2}[\\ [\frac{1}{5}, +\infty[&]-\infty, 5] &]-\infty, \frac{a+7}{a}[&]-\infty, -\frac{581}{86}] \quad]-\infty, 1[\quad]-\infty, \frac{23}{28}] \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 199

Inégalités et valeurs absolues

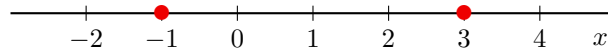


S'entraîner à faire le lien entre valeur absolue et inégalité

● Calcul 27.1



De quelle équation les deux nombres marqués d'un point sur l'axe gradué ci-dessous sont-ils les solutions ?



(a) $|x - 3| = 4$

(b) $|x + 1| = 2$

(c) $|x - 1| = 2$

(d) $|x + 1| = 4$

.....

● Calcul 27.2 — Premières équations.



Dans chacun des cas suivants, donner les solutions de l'équation.

a) $|x - 3| = 1$

b) $|3x + 2| = 13$

c) $|7x + 21| = 0$

● Calcul 27.3 — Premières inéquations.



On sait que :

$$|x| \leq 3 \iff -3 \leq x \leq 3.$$

De même, traduire chacune des inégalités suivantes par un encadrement de x .

a) $|x - 3| \leq 1$

c) $|2x - 3| \leq 5$

b) $|x + 4| \leq 5$

d) $|5x + 10| \leq 25$

● Calcul 27.4



Dans chacun des cas suivants, donner l'ensemble des solutions de l'inéquation.

a) $|x - 3| \leq 1$

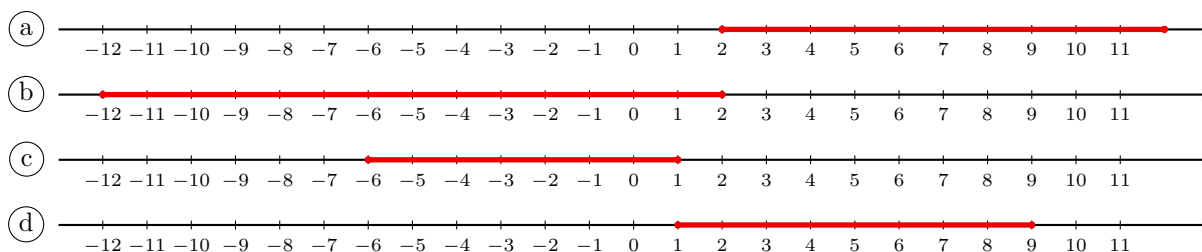
b) $|x + 5| \leq 7$

c) $|x - 6| \leq 0$

● **Calcul 27.5**



Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $|2x + 5| \leq 7$?

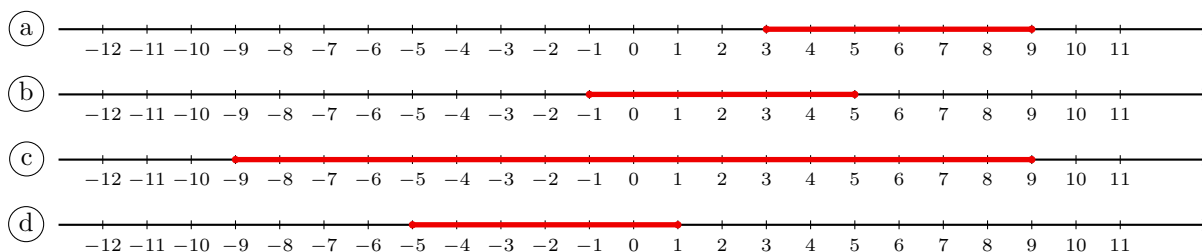


.....

● **Calcul 27.6**



Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $|6 - 3x| \leq 9$?



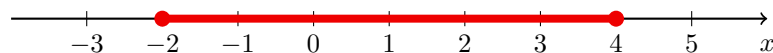
.....

● **Calcul 27.7 — Trouver une inéquation à partir de l'ensemble des solutions.**



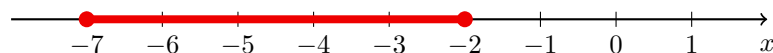
Dans chacun des cas suivants, proposer une inéquation, faisant intervenir la valeur absolue, dont l'ensemble des solutions est l'intervalle représenté sur l'axe gradué.

a)



.....

b)



.....

Réponses mélangées

$2 \leq x \leq 4$ -3 (c) $[2, 4]$ $|x + 4,5| \leq 2,5$ $-1 \leq x \leq 4$ (c)
 ou $|2x + 9| \leq 5$
 $|x - 1| \leq 3$ $\{6\}$ $-7 \leq x \leq 3$ 2 et 4 (b) $-9 \leq x \leq 1$ -5 et $\frac{11}{3}$ $[-12, 2]$

► Réponses et corrigés page 201

Manipulation d'inégalités



Maîtriser les opérations élémentaires sur les inégalités

● Calcul 28.1 — Trouver l'intervalle (I).



Dans chacun des cas suivants, déterminer l'intervalle (auquel appartient x) qui est défini par la condition donnée.

a) $x + 3 \geq -12$

d) $-4x \leq 24$

b) $x - 5 \leq 6$

e) $5x - 7 \geq 13$

c) $3x > 12$

f) $4 - 7x < -45$

● Calcul 28.2 — Trouver l'intervalle (II).



Même exercice.

a) $-2 \leq x + 1 \leq 5$

d) $-4 < -6x \leq 0$

b) $3 \leq x - 2 < 11$

e) $5 > 2x - 1 \geq 1$

c) $12 > 4x > -8$

f) $-17 \leq 3 - 5x \leq 33$

● Calcul 28.3 — Trouver l'intervalle (III).



Même exercice.

a) $x - 1 \in [-3, 2]$

c) $2x - 3 \in]-26, 74[$.

b) $x + 2 \in [1, 5[$

d) $-7x + 3 \in \left] \frac{2}{3}, \frac{15}{4} \right]$

● Calcul 28.4 — Encadrement d'une expression (I).



a) Encadrer $\frac{1}{x}$ sachant que $x \in [2, 3]$

b) Encadrer $\frac{-3}{x}$ sachant que $x \in [5, 9]$

c) Encadrer $\frac{-4}{x+2}$ sachant que $x \in [-6, -3]$

● **Calcul 28.5 — Encadrement d'une expression (II).**



a) Encadrer $2x + 3y$ sachant que $x \in [-2, 3]$ et $y \in [1, 2]$

b) Encadrer $5z + 3t$ sachant que $z \in [-4, -2]$ et $t \in [-3, 0]$

● **Calcul 28.6 — Encadrement d'une expression (III).**



a) Encadrer $-2x + 3y$ sachant que $x \in [-2, 3]$ et $y \in [1, 2]$

b) Encadrer $5z - 3t$ sachant que $z \in [-4, -2]$ et $t \in [-3, 0]$

● **Calcul 28.7 — Encadrer un produit.**



a) Encadrer le produit xy sachant que $x \in [2, 3]$ et $y \in [4, 7]$

b) Encadrer le produit zt sachant que $z \in [-3, -2]$ et $t \in [1, 2]$

c) Encadrer le produit uv sachant que $u \in [-1, 2]$ et $v \in [3, 6]$

● **Calcul 28.8 — Encadrer un quotient.**



a) Encadrer le quotient $\frac{x}{y}$ sachant que $x \in [2, 3]$ et $y \in [4, 7]$.

.....

b) Encadrer le quotient $\frac{z}{t}$ sachant que $z \in [-2, -1]$ et $t \in [-6, -3]$.

.....

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 [1, 3[& \frac{2}{7} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{4} & x \in [-1, 3[&]4, +\infty[&]-\infty, 11] & \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \leq \frac{z}{t} \leq \frac{2}{3} \\
]-2, 3[& x \in \left] \frac{-23}{2}, \frac{77}{2} \right[& 8 \leq xy \leq 21 & -20 \leq 5z - 3t \leq -1 & x \in \left[-\frac{3}{28}, \frac{1}{3} \right[& & \\
 [5, 13[& -6 \leq zt \leq -2 & -1 \leq 2x + 3y \leq 12 & -29 \leq 5z + 3t \leq -10 & [-6, +\infty[& & \\
 [-6, 4] & x \in [-2, 3] &]7, +\infty[& [-15, +\infty[& [4, +\infty[& -6 \leq uv \leq 12 & \\
 \frac{-3}{5} \leq \frac{-3}{x} \leq \frac{-1}{3} & \left[0, \frac{2}{3} \right[& -3 \leq -2x + 3y \leq 10 & 1 \leq \frac{-4}{x+2} \leq 4 & [-3, 4] & &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 203

Tableaux de signes et inéquations II



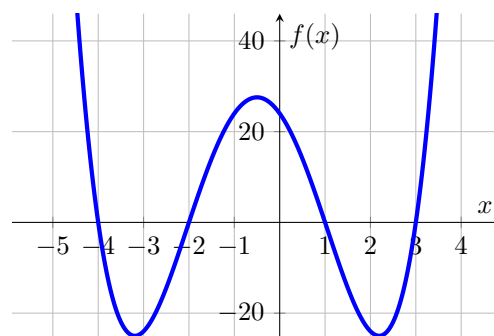
Savoir utiliser les tableaux de signes pour résoudre des inéquations

● Calcul 29.1 — Pour commencer.

Dans le repère ci-contre, on a tracé la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-5, 4]$.

Compléter le tableau de signes suivant :

x	...	...	...	...	...	...
$f(x)$		0	0	0	0	



● Calcul 29.2 — Quel est le signe ?

Voici les tableaux de signes de deux fonctions f et g , définies sur $[-4, 4]$:

x	-4	-2	4
$f(x)$	-	0	+

x	-4	-1	4
$g(x)$	+	0	-

Donner le signe des quantités suivantes.

- a) $f(-3)$ c) $f(-3) \times g(-3)$.. e) $\frac{g(-2)}{f(-2)}$
- b) $g(-3)$ d) $f(-2) \times g(-2)$..

● Calcul 29.3

a) Compléter le tableau de signes suivant, pour la fonction définie par $f(x) = (-5x + 4)(7x + 3)$.

x	$-\infty$	...	...	$+\infty$
...				
...				
...				

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$

c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{-5x + 4}{7x + 3} \leq 0$. ..

● **Calcul 29.4 — Résolution d'inéquations « produit ».**



Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

On établira au préalable un tableau de signes.

a) $(2x + 7)(x + 5) \geq 0$

b) $(-3x + 4)(-2x + 5) < 0$

● **Calcul 29.5 — Résolution d'inéquations « produit/quotient ».**



On veut résoudre l'inéquation :

$$\frac{(2x + 1)(-3x + 7)}{5x + 13} \geq 0.$$

a) Donner l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles cette inéquation est définie. ...

b) Donner l'ensemble des solutions de cette inéquation.

On établira au préalable un tableau de signes.

.....

● **Calcul 29.6 — En se ramenant à l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient.**



Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

On commencera par ramener l'inéquation considérée à une inéquation produit ou quotient, puis on établira un tableau de signes.

a) $(3x + 1)(7x + 4) \geq (3x + 1)(-3x + 2)$

b) $(x + 5)^2 < (x + 5)(-3x + 10)$

c) $\frac{2x + 4}{4x + 1} \leq \frac{7x + 3}{4x + 1}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{llll} \left] -\infty, -\frac{13}{5} \right[\cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{3} \right] & \text{négatif} & \left] \frac{4}{3}, \frac{5}{2} \right[& \left] -\infty, -\frac{1}{3} \right[\cup \left[-\frac{1}{5}, +\infty \right[\\ \left] -\frac{3}{7}, \frac{4}{5} \right[& \text{négatif} & \left] -5, \frac{5}{4} \right[& \left] -\infty, -5 \right[\cup \left[-\frac{7}{2}, +\infty \right[\\ \left] -\infty, -\frac{1}{4} \right[\cup \left[\frac{1}{5}, +\infty \right[& \text{non défini} & \left] -\infty, -\frac{3}{7} \right[\cup \left[\frac{4}{5}, +\infty \right[& \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-13}{5} \right\} \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 206

Tableaux de signes et inéquations III



S'entraîner à factoriser des expressions pour étudier leur signe

Consigne

Dans cette fiche, « résoudre une inéquation » signifiera « donner l'ensemble de ses solutions ».

● Calcul 30.1 — Quelques tableaux de signes pour commencer.

À l'aide d'un tableau de signes, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(x+3)(-3x+6) \geq 0$.		c) $\frac{x+4}{7x-14} \leq 0$	
b) $(12x-6)(5-x) > 0$..		d) $\frac{3x-2}{x+8} \geq 0$	

● Calcul 30.2 — Avec des factorisations.

À l'aide d'une factorisation (puis d'un tableau de signes), résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(1-2x)(5x-2) + 3(1-2x) < 0$	
b) $(x-1)(3x+5) \geq (4x-3)(x-1)$	
c) $(4x+3)(-x+7) > (5-2x)(4x+3)$	

● Calcul 30.3



a) Mettre au même dénominateur l'expression $\frac{x+1}{x-2} + 3$	
b) À l'aide d'un tableau de signes, résoudre l'inéquation $\frac{x+1}{x-2} \geq -3$	

● Calcul 30.4

En s'appuyant sur la méthode de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\frac{3x+1}{4x+5} \leq 2$		c) $\frac{3}{4-x} \leq 2$	
b) $\frac{4x-7}{5-2x} < 1$		d) $\frac{x+1}{-2x+3} \geq 3$...	

● **Calcul 30.5**



a) Mettre au même dénominateur l'expression $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x}$

b) À l'aide d'un tableau de signes, résoudre l'inéquation $\frac{3}{x+1} \leq \frac{2}{x}$

● **Calcul 30.6**



En se basant sur la méthode de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $\frac{1}{x} \leq \frac{3}{2x+6}$

b) $\frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x+2}{x}$

● **Calcul 30.7 — Avec les identités remarquables (I).**



À l'aide d'une factorisation, puis d'un tableau de signes, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $25 - 4x^2 \geq 0$

c) $(3x+1)^2 \leq 25$

b) $\frac{x^2}{9} - \frac{1}{16} > 0$

d) $(2x+4)^2 \geq 9x^2$

● **Calcul 30.8 — Avec les identités remarquables (II).**



À l'aide d'une factorisation, puis d'un tableau de signes, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a) $(2x+1)(5-x) + 4x^2 - 1 \leq 0$

b) $(3x+1)^2 - (2x+5)^2 \geq 0$

c) $8x^3 - 18x \leq 0$

Réponses mélangées

$]1/2, 5[$ $] -\infty, -1[\cup]0, 2]$ $] -\infty, 5/4[\cup]2, +\infty[$ $[-4/5, 4]$ $] -\infty, 5/2[\cup]4, +\infty[$
 $[-3, 2]$ $[-2, 4/3]$ $] -2, -4/5[\cup]0, +\infty[$ $] -\infty, -2[\cup] -3/4, +\infty[$ $] -\infty, 2[\cup]5/2, +\infty[$
 $] -3, 0[\cup]6, +\infty[$ $] -\infty, -3/2[\cup]0, 3/2]$ $] -\infty, -6/5[\cup]4, +\infty[$ $[-4, -1/2]$
 $] -\infty, -3/4[\cup]3/4, +\infty[$ $] -\infty, -1/5[\cup]1/2, +\infty[$ $[1, 8]$ $[-5/2, 5/2]$
 $[8/7, 3/2[$ $] -\infty, -8[\cup]2/3, +\infty[$ $] -\infty, -9/5[\cup] -5/4, +\infty[$ $[-4, 2[$

► Réponses et corrigés page 209

Équations du premier degré



Résoudre des équations du premier degré élémentaires

Cette fiche est entièrement composée d'équations dont on déterminera l'ensemble des solutions.

À chaque fois, on veillera à simplifier au maximum les nombres intervenant dans les ensembles. En particulier, les expressions données ne devront pas avoir de racine carrée au dénominateur.

● Calcul 31.1



a) $3x + 2 = 3$

c) $11x - 2 = 3 - 5x$

b) $x - 7 = 3x + 3$

d) $5x + 12 = -2 - 2x$

● Calcul 31.2 — Avec des racines.



a) $\sqrt{8}x - 4 = \sqrt{2}x + 2$

c) $\sqrt{2}x - 1 = \sqrt{2} + x$

b) $3(2x + 1) = 4x + 3 + 2\sqrt{3}$

d) $\sqrt{6}x + 2 = \sqrt{3}(\sqrt{2}x - 1)$

● Calcul 31.3 — Avec des fractions (I).



a) $\frac{x}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{4} - \frac{x}{3}$

c) $7\frac{x-1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{x}{6}$

b) $\frac{1}{2}\frac{x}{\frac{1}{2} + \frac{3}{5}} = 2x - 1$

d) $\frac{1}{3}\left(2x - \frac{5}{2}\right) = \frac{x+1}{1 + \frac{1}{2}}$

● Calcul 31.4 — Avec des fractions (II).



a) $\frac{2}{x} = \frac{3}{5}$

c) $\frac{2}{x-2} = -\frac{5}{x-1}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{x - \frac{1}{2}} = \sqrt{8}$

d) $\frac{1}{3(1-2x)} = -\frac{2}{4-x}$

Réponses mélangées

$\left\{-\frac{5}{8}\right\}$	$\{3 + 2\sqrt{2}\}$	$\left\{\frac{10}{3}\right\}$	$\{-2\}$	$\left\{\frac{1}{3}\right\}$	pas de solution	$\{1\}$	$\left\{\frac{11}{17}\right\}$
$\{3\sqrt{2}\}$	$\{-5\}$	$\left\{\frac{10}{13}\right\}$	$\{1\}$	$\{\sqrt{3}\}$	$\left\{\frac{12}{7}\right\}$	$\left\{\frac{5}{16}\right\}$	pas de solution

► Réponses et corrigés page 212

Équations du premier degré avec paramètre



Résoudre des équations du premier degré contenant un paramètre

● Calcul 32.1



Soit a un réel. Déterminer les solutions des équations d'inconnue x suivantes. Elles seront exprimées en fonction de la lettre a .

a) $x + 3 = a$

d) $1 - 2x = 3 - a^2$

b) $2x + a = 3$

e) $1 + a^2x = -x - a^2$

c) $5 - 3x = 3a + 2$

f) $x^2 - a^2x - 1 = (x - 1)(x + 2) + a^2$

● Calcul 32.2



Soit b un réel non nul. Déterminer les solutions des équations d'inconnue x suivantes. Elles seront exprimées en fonction de la lettre b .

a) $\frac{x}{b} - 3 = 2$

c) $\frac{2}{x} + \frac{b}{3} = \frac{b}{6}$

b) $\frac{x}{2} - \frac{3}{b} = 4$

d) $\frac{3}{bx} + x = x\left(1 - \frac{4b}{x}\right)$

● Calcul 32.3



a) Soit b un réel. Le nombre de solutions de l'équation $(x + 1)(x + 2b) = x^2 + (1 + 2b)(x + 1)$

(a) vaut 0

(b) vaut 1

(c) dépend de la valeur de b

b) Soit m un réel. Le nombre de solutions de l'équation $mx + 3 = 2$

(a) vaut 0

(b) vaut 1

(c) dépend de la valeur de m

c) Soit a un réel. L'ensemble des solutions de l'équation $a(x + a) = a(2x - 1)$

(a) peut être $\mathbb{R}$ (b) est toujours $\{1 + a\}$

(c) peut être vide

.....

Réponses mélangées

$$5b \quad \frac{1-a^2}{1+a^2} \quad (a) \quad 1-a \quad (a) \quad -\frac{3}{4b^2} \quad -\frac{12}{b}$$

$$\frac{6}{b} + 8 \quad (c) \quad \frac{a^2-2}{2} \quad -1 \quad a-3 \quad \frac{3-a}{2}$$

► Réponses et corrigés page 214

Équations du deuxième degré



Résoudre des équations de degré 2 dans des cas particuliers

Pour chacune des équations à résoudre, on donnera l'ensemble des solutions. À chaque fois, on veillera à simplifier au maximum les nombres apparaissant dans ces ensembles ; en particulier, les expressions données ne devront pas avoir de racine carrée au dénominateur.

● Calcul 33.1



Résoudre les équations suivantes.

a) $x^2 = 49$

d) $x^2 = 2\,500$

b) $144 - x^2 = 0$

e) $x^2 - 10\,000 = 0$

c) $x^2 = \frac{64}{9}$

f) $x^2 = 12$

● Calcul 33.2



Résoudre les équations suivantes.

a) $4x^2 - 16 = 0$

d) $\frac{5}{4x^2} = \frac{4}{5}$

b) $8 = 3x^2$

e) $\frac{1}{8}x^2 - \frac{2}{45} = 0$

c) $12x^2 = 11$

f) $\frac{3}{7}x^2 = \frac{5}{2}$

● Calcul 33.3 — Égalités de carrés.



Résoudre les équations suivantes.

a) $(x + 7)^2 = 49$

d) $(21x + 2)^2 = (x + 7)^2$

b) $(2x + 1)^2 = 25$

e) $\left(2 + \frac{x}{2}\right)^2 = \left(3x + \frac{1}{2}\right)^2$..

c) $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^2 = 121$

f) $\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{4}\right)^2 = \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{3}\right)^2$..

● **Calcul 33.4 — Équations produit nul (I).**



Résoudre les équations suivantes.

a) $(x+2)(4x+8) = 0$

c) $(x-7)\left(2x - \frac{22}{23}\right) = 0$

b) $\frac{7x}{8}\left(6x + \frac{4}{3}\right) = 0$

d) $\left(x - \frac{2}{3}\right)(3-2x) = 0$

● **Calcul 33.5 — Équations produit nul (II).**



Résoudre les équations suivantes.

a) $21x^2 + \frac{7}{3}x = 0$

c) $(x^2 - 81)(x+2) = 0$..

b) $\frac{64}{3}x^2 = \frac{48}{5}x$

d) $(1-2x)(x^2-2) = 0$..

● **Calcul 33.6 — Avec des identités remarquables.**



En utilisant des identités remarquables, résoudre les équations suivantes.

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{4} = x$

b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$...

d) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$

● **Calcul 33.7 — Des équations de degré 4.**



Résoudre les équations suivantes.

a) $(x^2-9)(x^2+9) = 0$

b) $x^4 = 81$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc} \left\{-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right\} & \left\{-\frac{20}{13}, \frac{20}{9}\right\} & \{-1, 1\} & \left\{-\frac{5}{7}, \frac{3}{5}\right\} & \left\{\frac{1}{2}\right\} & \left\{0, \frac{9}{20}\right\} & \{-7, 7\} \\ \{-12, 12\} & \left\{-8, \frac{20}{3}\right\} & \{-2\} & \{-1\} & \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\} & \{-14, 0\} & \left\{-\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}\right\} \\ \left\{-\frac{2}{9}, 0\right\} & \{-3, 2\} & \left\{-\frac{\sqrt{210}}{6}, \frac{\sqrt{210}}{6}\right\} & \{-9, -2, 9\} & \{-3, 3\} & \{-50, 50\} \\ \left\{-\frac{\sqrt{33}}{6}, \frac{\sqrt{33}}{6}\right\} & \{-2, 2\} & \{-3, 3\} & \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\} & \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\} & \left\{\frac{11}{23}, 7\right\} \\ \{-100, 100\} & \left\{-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right\} & \{\sqrt{2}\} & \left\{-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right\} & \left\{-\frac{1}{9}, 0\right\} & \left\{-\frac{9}{22}, \frac{1}{4}\right\} \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 215

Systèmes d'équations



S'entraîner à la résolution de petits systèmes d'équations

● Calcul 34.1 — Sont-ils solutions ?



Dire si, « oui » ou « non », les couples suivants sont solutions du système $\begin{cases} 2x - 4y = -10 \\ -3x + 6y = 15. \end{cases}$

a) $(4, 3)$
c) $(-3, 1)$
b) $(3, 4)$
d) $(2, 3)$

● Calcul 34.2



Dire si, « oui » ou « non », les couples suivants sont solutions du système $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 4y = -15. \end{cases}$

a) $(4, 1)$
c) $(-1, 3)$
b) $(-5, 0)$
d) $(-4, 5)$

● Calcul 34.3 — Premiers systèmes.



Donner, dans chacun des cas suivants, le couple solution du système.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + 3y = -2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x - y = -6 \\ x + y = 2 \end{cases}$
d) $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases}$

● Calcul 34.4 — Avec des fractions.



Donner, dans chacun des cas suivants, le couple solution du système.

a) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 5x + 8y = 4 \end{cases}$
c) $\begin{cases} -3x + y = -8 \\ 27x - 6y = -2 \end{cases}$
b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3y = \frac{3}{4} \\ 2x - 6y = -\frac{3}{2} \end{cases}$
d) $\begin{cases} x + \frac{3}{4}y = \frac{7}{8} \\ 4x + \frac{3}{5}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

● **Calcul 34.5 — À l'intersection de deux droites.**



Trouver les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $y = 2x + 4$ et $y = -3x + 5$.

.....

● **Calcul 34.6 — Viennoiseries.**



Une personne achète des pains au chocolat à 1,20 euro et des croissants à 1 euro.

Au total, cela lui coûte 10,80 euros, sachant qu'elle a acheté 10 viennoiseries.

Combien a-t-elle acheté de croissants ?

.....

● **Calcul 34.7 — Avec des racines.**



Donner, dans chacun des cas suivants, le couple solution du système.

a) $\begin{cases} 2\sqrt{2}x + 4y = -1 \\ 6\sqrt{2}x + 8y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + (1 - \sqrt{3})y = 1 \\ (2 - \sqrt{3})x - y = 0 \end{cases}$

● **Calcul 34.8 — Voyage en train.**



Un TGV part de Paris et dessert les gares de Rennes puis de Saint-Malo. Un groupe de 7 passagers monte dans ce train à Paris, dont 2 pour Rennes. Au total, ils ont dépensé 270 euros. Le lendemain, un groupe de 6 passagers monte dans ce train (au même tarif), dont 4 pour Rennes. Au total, ils paient 220 euros.

Quel est le prix d'un billet pour Saint-Malo ?

.....

● **Calcul 34.9 — Des systèmes plus subtils.**



Donner, dans chacun des cas suivants, les éventuels couples solutions du système.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 15x - 10y = 40 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x + 12y = 3 \end{cases}$

Réponses mélangées

non non $(-2, 4)$ oui oui $\left(x, \frac{3x-8}{2}\right)$,
pour tout $x \in \mathbb{R}$ $(-1, 2)$ non

Il n'y a pas de solution $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $(2, 3)$ $(1, -1)$ $\left(-3, -\frac{3}{4}\right)$ $\left(\frac{1}{5}, \frac{22}{5}\right)$

40 $\left(\frac{5}{4}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\right)$ $\left(-\frac{50}{9}, -\frac{74}{3}\right)$ non non oui 6 $(4, -2)$ $\left(\frac{-3}{8}, \frac{5}{3}\right)$

► Réponses et corrigés page 217

Bilan et approfondissement sur les équations et inéquations



Consolider et approfondir la maîtrise des équations et inéquations

Équations et inéquations du premier degré

● Calcul 35.1



Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

On ne laissera pas de racine carrée au dénominateur des solutions.

a) $3 - 7x = 8 + 10x$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{\sqrt{3}}x$

● Calcul 35.2



Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

On ne laissera pas de racine carrée au dénominateur des solutions.

a) $\frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = \frac{2 - \frac{x}{3}}{3}$

b) $(5 - \sqrt{3})(4x + 1) = (20 - 5\sqrt{3})x + (8 - \sqrt{3})$

● Calcul 35.3



Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $\frac{x-1}{2} \leq 2 - 2x$ b) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5} \leq \frac{5}{7}x + 1$

● Calcul 35.4



Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

On ne laissera pas de racine carrée au dénominateur des solutions.

a) $x - \sqrt{2} \leq \sqrt{2}x - 1$ b) $2(3x + 1) < 4x + 2 + \sqrt{2}$.

● Calcul 35.5 — Deux systèmes linéaires.



Donner la solution de chacun des systèmes linéaires suivants.

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$

● **Calcul 35.6 — Avec un paramètre.**



On considère un réel a . Donner, en fonction de a , l'ensemble des solutions des équations ou inéquations suivantes, d'inconnue x .

a) $\sqrt{2}x + \sqrt{6}a = \sqrt{2}a - \sqrt{8}x$

b) $\frac{x - \sqrt{2}a}{2} < \sqrt{2}a - x$

Autour du second degré

● **Calcul 35.7**



Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $3 - 2x^2 = -15$ b) $x^2 + 3x = 2x - 5x^2$...

● **Calcul 35.8**



En s'aidant d'un tableau de signes, donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $x(x - 1) \leq 2(x - 1)$. b) $(x - 2)(x^2 - 8) \geq 0$.

● **Calcul 35.9 — Du faux second degré.**



Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $(x + 2)^2 = (2x + 1)^2 - 3(x - 1)^2$

b) $\frac{4x + 1}{2x - 1} = \frac{2x + 3}{x - 1}$

● **Calcul 35.10 — Équations avec des fractions.**



Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $\frac{1}{x - 1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(x - 1)}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{x - \sqrt{2}} + 3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$

● **Calcul 35.11**



En s'aidant d'un tableau de signes, donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $\frac{1}{2x - 1} \leq 3 + \frac{2}{2x - 1}$

b) $\frac{1}{3x - 2} - 4 \geq \frac{1}{2 - 3x} + 2$

● **Calcul 35.12**



En s'aidant d'un tableau de signes, donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $\frac{1}{x-1} \leq \frac{3}{2x-1}$

b) $\frac{2}{3-x} - 1 \leq -\frac{2}{3+x} + 1$

● **Calcul 35.13 — Équations du second degré plus subtiles (I).**



Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $(x-1)^2 = 4$

c) $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 = \frac{1}{2}$

b) $(2x+3)^2 = \frac{1}{16}$

d) $\left(\frac{x}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3$

● **Calcul 35.14 — Équations du second degré plus subtiles (II).**



Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $(x-1)^2 = (3-2x)^2$

c) $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)^2$

b) $(x-3)^2 = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{5}\right)^2$

d) $\left(2x - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - 2x\right)^2$..

● **Calcul 35.15 — Du second degré dans du second degré.**



Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a) $(x^2 - 2)^2 = 4$

c) $(x^2 - 2)^2 = \frac{4}{9}$

b) $\left(x^2 - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$...

d) $x^4 = 64$

Calculs plus difficiles

● **Calcul 35.16 — Du second degré plus corsé (I).**



Résoudre les équations suivantes.

a) $\left(\frac{5x^2 - 1}{3x^2 - 5}\right)^2 = 4$

b) $\left(\frac{-6x^2 + 14}{x^2 - 1}\right)^2 = 4$

● **Calcul 35.17 — Du second degré plus corsé (II).**



Résoudre les équations suivantes.

a) $\left((x^2 - 4)^2 - 5\right)^2 = 16$

b) $\left(\frac{4x^2 - 8}{x^2 + 1}\right)^2 = 36$

● **Calcul 35.18 — Système linéaire avec un paramètre.**



On considère un réel α . Soient x et y tels que : $\begin{cases} x + \alpha y = 1 & (L_1) \\ -\alpha x + y = 3 & (L_2) \end{cases}$.

a) Parmi les opérations suivantes, laquelle permet de déterminer la variable x ?

(a) $L_1 + L_2$

(b) $L_1 + \alpha L_2$

(c) $L_1 - \alpha L_2$

(d) $\alpha L_1 + L_2$

.....

b) En déduire la valeur de x

c) En déduire la valeur de y

Réponses mélangées

$$\begin{aligned} & [-2\sqrt{2}, 2] \cup [2\sqrt{2}, +\infty[\quad \left\{ -\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9\sqrt{3}}{2} \right\} \quad \left\{ -\frac{13}{8}, -\frac{11}{8} \right\} \quad] -\infty, \frac{1}{3}] \cup \left] \frac{1}{2}, +\infty[\right. \\ & \{1\} \quad \left\{ -\frac{1}{3}(\sqrt{3}-1)a \right\} \quad \frac{1-3\alpha}{1+\alpha^2} \quad \left[-\frac{21}{2}, +\infty[\quad \left\{ -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right\} \\ & [-1, +\infty[\quad \left\{ \frac{12}{5}, \frac{21}{5} \right\} \quad \{5\} \quad \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \right\} \quad \{1\} \quad \left\{ -\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3} \right\} \\ & \left\{ \frac{4}{3}, 2 \right\} \quad \left\{ \left(\frac{13}{4}, \frac{3}{4} \right) \right\} \quad \textcircled{c} \quad [1, 2] \quad] -\infty, \sqrt{2} a[\quad \{-3, 3\} \quad \left\{ \left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7} \right) \right\} \\ & \{-3, -1, 1, 3\} \quad \left\{ -\frac{3}{5}, \frac{7}{5} \right\} \quad \left\{ \pm\sqrt{7}, \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{3}, \pm 1 \right\} \quad \{0\} \quad \left] \frac{2}{3}, \frac{7}{9} \right] \\ & \left\{ \frac{2}{7} \right\} \quad \left\{ -\frac{1}{6}, 0 \right\} \quad \left\{ \sqrt{3} \right\} \quad \{-1, 3\} \quad] -\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}[\quad \left\{ -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \right\} \\ & \{-2, 0, 2\} \quad \left\{ -\frac{5}{17} \right\} \quad] -\infty, -3[\cup [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup] 3, +\infty[\quad \left\{ \frac{11}{4} \right\} \quad \left\{ \frac{7}{24} \right\} \\ & \left] \frac{1}{2}, 1[\cup [2, +\infty[\quad \left\{ 5\sqrt{3} \right\} \quad \frac{3+\alpha}{1+\alpha^2} \quad \{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\} \quad] -\infty, 1] \end{aligned}$$

► Réponses et corrigés page 219

Images et antécédents



Savoir lire et calculer des images et des antécédents

● Calcul 36.1



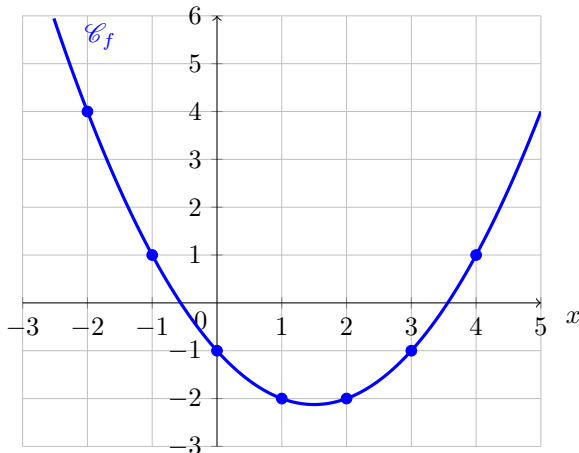
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$. Calculer les images suivantes.

- | | | | | | |
|-----------------|----------------------|------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $f(0)$ | <input type="text"/> | c) $f(-2)$ | <input type="text"/> | e) $f\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$... | <input type="text"/> |
| b) $f(2)$ | <input type="text"/> | d) $f(\sqrt{7})$ | <input type="text"/> | f) $f(1 - \sqrt{2})$.. | <input type="text"/> |

● Calcul 36.2 — Lecture graphique.



On a représenté ci-dessous le graphe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f sur l'intervalle $[-3, 5]$.



Lire graphiquement les images par f des nombres :

- | | | | |
|--------------|----------------------|--------------|----------------------|
| a) -2 ... | <input type="text"/> | d) 1 | <input type="text"/> |
| b) 0 | <input type="text"/> | e) 4 | <input type="text"/> |
| c) 2 | <input type="text"/> | f) -1 ... | <input type="text"/> |

Lire graphiquement, si possible, le ou les antécédents par la fonction f des nombres :

- | | | | |
|-------------|----------------------|--------------|----------------------|
| g) -2 ... | <input type="text"/> | i) -3 ... | <input type="text"/> |
| h) -1 ... | <input type="text"/> | j) 1 | <input type="text"/> |

● Calcul 36.3



On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x + \sqrt{2}$ et $g(x) = \frac{13}{5}x + 3$.

Déterminer le ou les antécédents des nombres suivants par f .

- | | | | | | |
|--------------|----------------------|---------------------|----------------------|--------------|----------------------|
| a) 0 | <input type="text"/> | b) $\sqrt{2}$ | <input type="text"/> | c) 1 | <input type="text"/> |
|--------------|----------------------|---------------------|----------------------|--------------|----------------------|

Déterminer le ou les antécédents des nombres suivants par g .

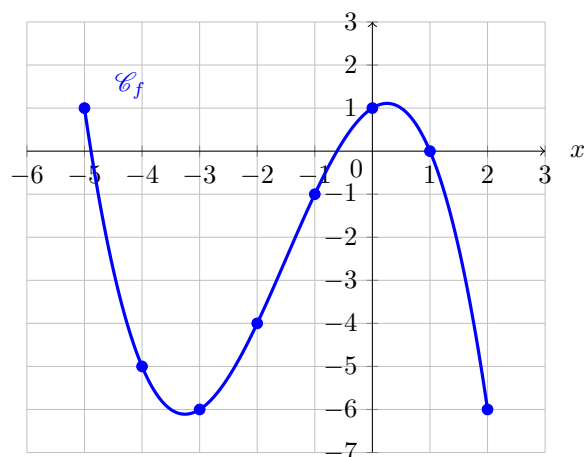
On donnera le résultat sans racine au dénominateur.

- | | | | | | |
|--------------|----------------------|-----------------------|----------------------|---------------------------------------|----------------------|
| d) 0 | <input type="text"/> | e) $3 - \sqrt{5}$... | <input type="text"/> | f) $\frac{\sqrt{7} + 4}{\sqrt{3}}$.. | <input type="text"/> |
|--------------|----------------------|-----------------------|----------------------|---------------------------------------|----------------------|

● **Calcul 36.4 — Encore des lectures graphiques !**



On a représenté ci-dessous le graphe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f sur l'intervalle $[-5, 2]$.



Lire graphiquement les images par f des nombres :

a) $-5 \dots$ c) $1 \dots\dots$

b) $-1 \dots$ d) $2 \dots\dots$

Donner le nombre d'antécédents par f des nombres suivants :

e) $-1 \dots$ f) $2 \dots\dots$

Lire graphiquement le ou les antécédents entiers des nombres :

g) $-5 \dots$ h) $1 \dots\dots$

● **Calcul 36.5**



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+3)(3x-6)$.

a) Déterminer le ou les antécédents de 0 par f .

b) Développer $f(x)$. d) Développer $3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

c) Résoudre $f(x) = -18$. e) Résoudre $f(x) = -\frac{75}{4}$.

● **Calcul 36.6 — Une fonction homographique.**



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\}$ par $f(x) = \frac{5x-2}{1-4x}$.

Déterminer, si possible, le ou les antécédents par f des nombres suivants.

On donnera le résultat sans racine au dénominateur.

a) $1 \dots\dots$ b) $-\frac{5}{4} \dots\dots$ c) $1 - \sqrt{5} \dots$

Réponses mélangées

-3 et 2	3	-1	1	0	0	0	1	-4	3	0 et 3	0	$-\frac{29}{9}$
$3x^2 + 3x - 18$	-2	-6	4	$\frac{1}{3}$	1	-2	-5 et 0	aucun	-4			
$-\frac{\sqrt{2}}{7}$	$\frac{5}{39}(-9 + 4\sqrt{3} + \sqrt{21})$	$-\frac{5\sqrt{5}}{13}$	$-1 - 2\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	aucun	1 et 2						
$\frac{1 - \sqrt{2}}{7}$	$-\frac{15}{13}$	-1	$7 + 3\sqrt{5}$	-1 et 0	-1 et 4	$3x^2 + 3x + \frac{3}{4}$	0					

► Réponses et corrigés page 224

Tableaux de variations



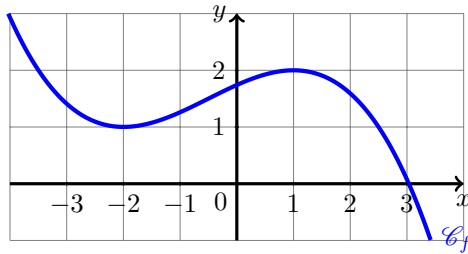
Tracer et utiliser des tableaux de variations

● Calcul 37.1



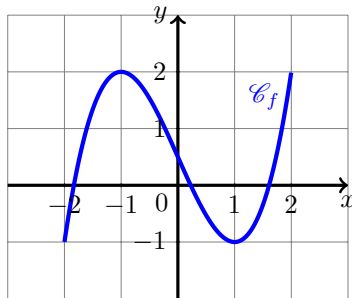
Dans chacun des cas suivants, tracer le tableau de variations de la fonction f définie sur l'intervalle I .

a) (avec $I = \mathbb{R}$)



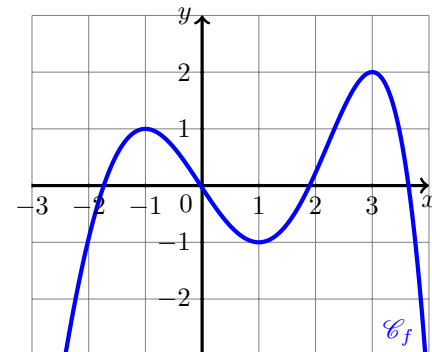
.....

b) (avec $I = [-2, 2]$)



.....

c) (avec $I = \mathbb{R}$)



.....

● Calcul 37.2



On considère le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$	-4	1	6	10	15	$+\infty$
variations de f		↗ 6	↘ 5	↗ 8	↘ -2	↗ 4	↘

Pour chacune des inégalités suivantes, choisir la réponse correcte parmi les trois propositions :

(a) vraie

(b) fausse

(c) on ne peut pas savoir

a) $f(7) \leq f(9)$

f) $f(0) \leq f(7)$

b) $f(2) < f(4)$

g) $f(0) \leq f(16)$

c) $f(11) \geq f(13)$

h) $f(13) > f(-3)$

d) $f(-30) < f(-4)$

i) $f(-5) \geq f(8)$

e) $f(11) \leq f(2)$

● Calcul 37.3



Voici un raisonnement permettant d'encadrer des racines carrées par des entiers.

Comme la fonction « racine carrée » est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme on a $9 \leq 10 \leq 16$, on en déduit que :

$$\sqrt{9} \leq \sqrt{10} \leq \sqrt{16},$$

c'est-à-dire que :

$$3 \leq \sqrt{10} \leq 4.$$

En utilisant la même méthode, compléter les inégalités suivantes avec des nombres entiers consécutifs :

a) $\leq \sqrt{17} \leq$

c) $\leq \frac{4 + \sqrt{39}}{2} \leq$

b) $\leq \sqrt{95} \leq$

d) $\leq \frac{5 - \sqrt{53}}{2} \leq$

Réponses mélangées

(b) (c) (b) $4 < \dots < 5$ $-2 < \dots < -1$ (a)
 (a) (b) (c) (a) (b) $5 < \dots < 6$ $9 < \dots < 10$

► Réponses et corrigés page 226

Points des courbes des fonctions



Bien comprendre le lien entre le graphe d'une fonction et son expression

● Calcul 38.1 — Tester si un point est sur une courbe.



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 4$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

a) Le point A de coordonnées (2 ; 14) appartient-il à $\mathcal{C}_f$?

b) Le point B de coordonnées (4 ; 0) appartient-il à $\mathcal{C}_f$?

● Calcul 38.2 — Des images et des antécédents.



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

a) Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathcal{C}_f$ dont l'abscisse vaut 1.

b) Déterminer les coordonnées des deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ dont l'ordonnée vaut 5.

.....

● Calcul 38.3 — Où est A ?



On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 10x + 1$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, et on note A le point de $\mathcal{C}_f$ dont l'abscisse vaut 3.

Le point A est-il au-dessus de l'axe des abscisses ?

● Calcul 38.4



On considère la fonction f définie, pour tout $x \neq 0$, par $f(x) = \frac{1}{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, et on note (D) la droite d'équation $y = x$.

Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et (D).

● Calcul 38.5



On considère la fonction g définie, pour tout $x \neq 0$, par $g(x) = \frac{1}{x}$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

a) À quelle condition portant sur a la quantité $g(a + 1)$ est-elle bien définie ?

b) À quelle condition portant sur a le point A($a + 1$; 2) appartient-il à $\mathcal{C}_g$?

c) À quelle condition portant sur a le point B($a + 1$; $a - 1$) appartient-il à $\mathcal{C}_g$? .

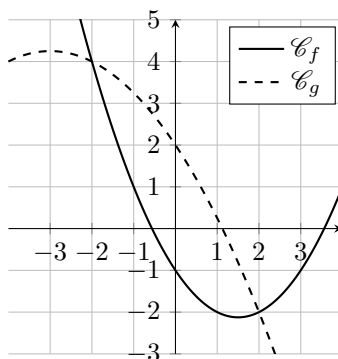
● **Calcul 38.6**



On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives, tracées ci-dessous.



a) Graphiquement, combien l'équation $f(x) = g(x)$ semble-t-elle avoir de solutions?

b) Déterminer ces solutions.

● **Calcul 38.7**



On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 1$ et $g(x) = x^2 + 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives.

Déterminer les coordonnées du ou des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

.....

● **Calcul 38.8**



Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie, pour tout $x \neq a$, par $f(x) = \frac{x+a}{x-a}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Pour quelle valeur du réel a la courbe $\mathcal{C}_f$ passe-t-elle par le point de coordonnées $(1; 2)$?

.....

Réponses mélangées

$a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$	oui	$(1; 1)$ et $(-1; -1)$	$(0; 1)$ et $(1; 2)$	$a \neq -1$
$a = -\frac{1}{2}$	non	$(1; 2)$	$a = \frac{1}{3}$	$(0; 5)$ et $(4; 5)$
			non	$x = -2$ et $x = 2$
				2

► Réponses et corrigés page 228

Fonctions et inéquations



Étudier les positions relatives de courbes représentatives de fonctions

● Calcul 39.1



On considère trois fonctions f , g et h définies sur $[-1, 4]$, dont on a tracé ci-dessous les courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$.

Ranger par ordre croissant :

a) $f(1)$, $g(1)$ et $h(1)$

b) $f(2)$, $g(2)$ et $h(2)$

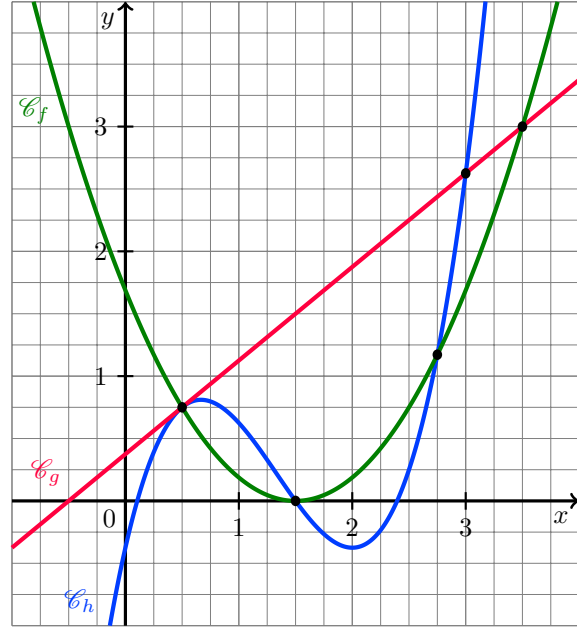
Donner l'ensemble des solutions de :

c) $f(x) \leq 3$

d) $g(x) \geq f(x)$

e) $h(x) > f(x)$

f) $g(x) \leq h(x)$

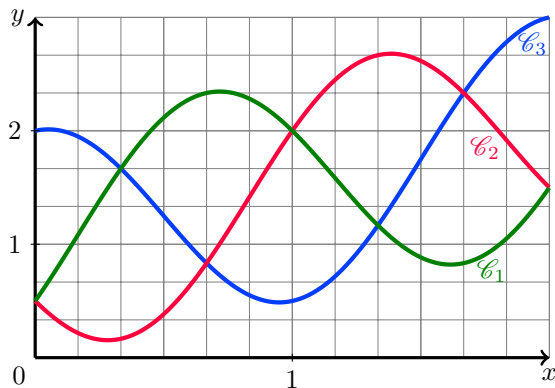


● Calcul 39.2



On considère trois fonctions f , g et h définies sur $[0, 2]$, dont les courbes représentatives sont tracées ci-dessous. On sait que l'ensemble des solutions réelles de $f(x) \leq g(x)$ est $\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right]$.

En vous appuyant sur le graphique, donner :



a) la courbe représentative de f

b) la courbe représentative de g

c) la courbe représentative de h

d) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq h(x)$.

.....

● **Calcul 39.3 — Avec des fonctions affines.**



On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$.

Donner l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

a) $g(x) \geq \frac{7}{3}$

b) $f(x) < g(x)$

● **Calcul 39.4 — Une première étude de signe.**



On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 - 3x^2$ et $g(x) = -6x + 2$, dont on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectives.

a) Écrire $f(x) - g(x)$ sous forme factorisée.

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x$		
$2 - x$		
$f(x) - g(x)$		

b) Compléter le tableau de signes.

c) Sur quel(s) intervalle(s) $\mathcal{C}_f$ est-elle strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$? ...

● **Calcul 39.5**



On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5$ et $g(x) = 5 - 3x^2$, dont on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectives.

a) Écrire $f(x) - g(x)$ sous forme factorisée.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) - g(x)$		

b) Compléter le tableau de signes.

c) Sur quel(s) intervalle(s) $\mathcal{C}_g$ est-elle strictement en dessous de $\mathcal{C}_f$? ..

Réponses mélangées

$$\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [3, 4] \quad [4, +\infty[\quad h(2) < f(2) < g(2) \quad]-\infty, -\frac{16}{9}[$$

$$3x(2-x) \quad]-3, 0[\text{ et }]0, +\infty[\quad \mathcal{C}_2 \quad]0, 2[\quad \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right] \quad \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$$

$$f(1) < h(1) < g(1) \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] \quad \mathcal{C}_1 \quad x^2(x+3) \quad \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{11}{4}, 4\right[\quad \mathcal{C}_3$$

► Réponses et corrigés page 230

Calcul avec les fonctions



S'entraîner à manipuler des expressions de fonctions

● Calcul 40.1



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + x$.

Calculer chacune des expressions suivantes.

a) $f(2x)$

d) $f(x^3)$

b) $f(-x)$

e) $f(\sqrt{t})$

c) $f(x^2)$

f) $f(1-x)$

● Calcul 40.2 — Paire ? Impaire ? Ni l'un ni l'autre ?



Pour chacune des fonctions définies par les expressions ci-dessous, choisir la réponse correcte parmi les trois propositions suivantes :

(a) paire

(b) impaire

(c) ni paire ni impaire

a) $f_1(x) = \frac{x}{1+x^2}$

c) $f_3(x) = \frac{2+x}{1+x^2}$

b) $f_2(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^6 + 1}$

d) $f_4(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^4 + 1}$

● Calcul 40.3 — Emboîtements de fonctions (I).



On considère les fonctions f , g et h définies par :

$$f(x) = \sqrt{x-3}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2-1} \quad \text{et} \quad h(x) = x^4.$$

Pour $x > 4$, calculer et simplifier chacune des expressions suivantes.

On ne prendra pas la peine de s'assurer que, pour de telles valeurs de x , les expressions sont bien définies.

a) $f(h(x))$

c) $g(f(x))$

b) $h(f(x))$

d) $h(g(x))$

● **Calcul 40.4 — Emboîtements de fonctions (II).**



On considère les fonctions f , g et h définies par :

$$f(x) = x^2 + 2x + 2, \quad g(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{x-1}.$$

Pour $x > 1$, calculer et simplifier chacune des expressions suivantes.

On ne prendra pas la peine de s'assurer que, pour de telles valeurs de x , les expressions sont bien définies.

a) $f(g(x))$		c) $f(h(x))$	
b) $g(f(x))$		d) $h(f(x))$	

● **Calcul 40.5**



On considère une fonction affine f , c'est-à-dire une fonction dont l'expression est de la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux réels. Déterminer l'expression de $f(x)$, avec les conditions suivantes.

a) $f\left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{7}{3}$ et $f\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{1}{2}$	
b) $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{8}$	

● **Calcul 40.6**



Même consigne que pour l'exercice précédent, avec les conditions suivantes.

a) $f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{5}f(1)$ et $f(3) - f(-3) = \frac{3}{5}$	
b) $f(1) = 3f(0)$ et $f(-2) + f(0) + f(4) = 21$	
c) $f(0) = -2$, $f(1) \times f(2) + f(6) = 52$ et $f(2) - f(1) < 0$	

Réponses mélangées

$x + 1 + 2\sqrt{x-1}$	$\frac{2x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2}$	$\frac{1}{x-4}$	$-x^3 - x^2 - x$	(a)	$(x-3)^2$
$-6\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}$	$x^6 - x^4 + x^2$	$8x^3 - 4x^2 + 2x$	$\frac{1}{(x-1)^4(x+1)^4}$	(b)	
$\frac{1}{(x+1)^2}$	$x + 1$	$-x^3 + 2x^2 - 2x + 1$	$22x + \frac{179}{6}$	(c)	$\sqrt{x^4 - 3}$
$x^9 - x^6 + x^3$	$-5x - 2$	$t\sqrt{t} - t + \sqrt{t}$	(b)	$6x + 3$	$\frac{1}{10}x + \frac{7}{80}$

► Réponses et corrigés page 232

Bilan et approfondissement sur les fonctions



Revoir et approfondir les techniques sur les fonctions

Images et antécédents

● Calcul 41.1



On considère la fonction f définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculer les nombres suivants.

- | | | | |
|---------------------------|----------------------|--------------------------------|----------------------|
| a) l'image de 8 | <input type="text"/> | c) l'antécédent de 11 | <input type="text"/> |
| b) l'image de -11 | <input type="text"/> | d) l'antécédent de -21 | <input type="text"/> |

Déterminer l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

- | | | | |
|----------------------------------|----------------------|-------------------------|----------------------|
| e) $f(x) \geq \frac{5}{2}$ | <input type="text"/> | f) $f(x) \leq -7$ | <input type="text"/> |
|----------------------------------|----------------------|-------------------------|----------------------|

● Calcul 41.2



On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculer les nombres suivants.

- | | | | |
|--------------------------------|----------------------|--------------------------------|----------------------|
| a) l'image de 3 | <input type="text"/> | c) les antécédents de 5 | <input type="text"/> |
| b) l'image de $\sqrt{2}$ | <input type="text"/> | d) les antécédents de 77 | <input type="text"/> |

Déterminer l'ensemble des solutions des inéquations suivantes.

- | | | | |
|-------------------------|----------------------|-------------------------|----------------------|
| e) $f(x) \leq 14$ | <input type="text"/> | f) $f(x) \geq 29$ | <input type="text"/> |
|-------------------------|----------------------|-------------------------|----------------------|

● Calcul 41.3



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{(7x-3)(3x+1)}{21x^2+1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculer les nombres suivants.

- | | | | |
|--------------------------|----------------------|-------------------------------------|----------------------|
| a) l'image de 2 | <input type="text"/> | c) le ou les antécédents de 1 ... | <input type="text"/> |
| b) l'image de -2 | <input type="text"/> | d) le ou les antécédents de -3 .. | <input type="text"/> |

Domaines de définition

● Calcul 41.4



Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

- | | |
|--|--|
| <p>a) $x \mapsto \frac{1}{x+8}$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>b) $x \mapsto \frac{1}{14x-7}$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>c) $x \mapsto \frac{x^2}{(x-5)(x+\frac{1}{2})}$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> | <p>d) $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>e) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>f) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(8-x)(x+8)}}$... <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> |
|--|--|

● Calcul 41.5



Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

- | | |
|--|--|
| <p>a) $x \mapsto \sqrt{x-3} \times \sqrt{x+2}$. <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>b) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(x-3)(x+2)}}$. <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>c) $x \mapsto \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}}$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> | <p>d) $x \mapsto \sqrt{-\frac{x-3}{x+2}}$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>e) $x \mapsto \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>f) $x \mapsto \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> |
|--|--|

Variations, positions relatives

● Calcul 41.6



Soit f une fonction définie sur $[-3, 18]$, dont le tableau de variations est représenté ci-contre.

Pour chaque affirmation, répondre par :

- (a) vrai (b) faux (c) on ne peut rien dire

x	-3	2	9	15	18
f	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
			1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$

- | | |
|---|--|
| <p>a) $f(-3) \geq f(5)$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>b) $f(6) \leq f(1)$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>c) $f(16) \geq f(-1)$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>d) $f(2) \geq f(17)$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> | <p>e) $f\left(\frac{35}{2}\right) \leq f\left(\frac{23}{2}\right)$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>f) $f\left(-\frac{8}{3}\right) < f\left(\frac{1}{625}\right)$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>g) $f\left(\frac{5}{2}\right) \leq f\left(\frac{18}{5}\right)$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> <p>h) $f\left(-\frac{13}{5}\right) \geq f\left(-\frac{1}{6}\right)$ <input style="width: 100px; height: 30px;" type="text"/></p> |
|---|--|

● Calcul 41.7

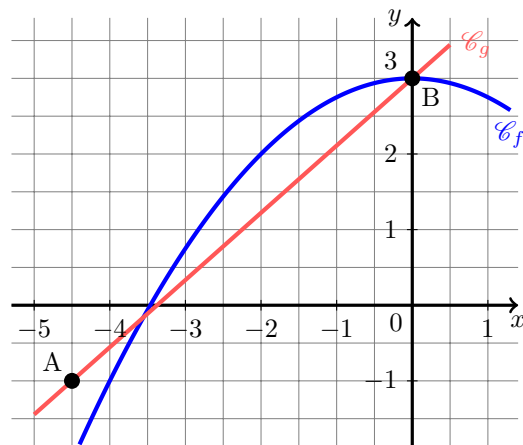
Dans le repère ci-contre, on a tracé la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On a également tracé $\mathcal{C}_g$ la représentation graphique de la fonction affine g passant par les points A et B.

- a) Déterminer graphiquement, et sous forme fractionnaire, les coordonnées du point A.

.....



- b) Déterminer une expression de $g(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$

- c) Calculer et factoriser, pour $x \in \mathbb{R}$, la différence $f(x) - g(x)$

- d) En déduire l'intervalle sur lequel $\mathcal{C}_g$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$

Calculs plus difficiles

● Calcul 41.8

On définit la fonction f par $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

- a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2\}$. Déterminer $f(x+1)$

- b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

- c) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0[$. Déterminer $f\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)$

● Calcul 41.9 — Parité et opérations.

Soient f et g deux fonctions impaires. On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $s(x) = f(x) + g(x)$ et $p(x) = f(x) \times g(x)$.

- a) La fonction s est :

(a) paire

(b) impaire

.....

- b) La fonction p est :

(a) paire

(b) impaire

.....

● **Calcul 41.10 — Polynôme de degré 2 et parité.**



Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On définit f par $f(x) = ax^2 + bx + c$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(-x)$

b) Déterminer b pour que f soit une fonction paire.

● **Calcul 41.11**



a) Déterminer a et b tels que $(\sqrt{56} - 8)^2 - (\sqrt{56} - 7)^2 = a + b\sqrt{56}$

b) Choisir la bonne réponse : (a) $a^2 \leq 56b^2$ (b) $a^2 \geq 56b^2$

.....

c) La différence $(\sqrt{56} - 8)^2 - (\sqrt{56} - 7)^2$ est-elle positive ou négative?

d) Le nombre $\sqrt{56}$ est-il plus proche de 7 ou de 8?

● **Calcul 41.12 — Trouver l'entier le plus proche.**



a) Déterminer un entier n tel que $n < \sqrt{43} < n + 1$

b) Déterminer l'entier le plus proche de $\sqrt{43}$

On pourra s'inspirer de l'exercice précédent.

Réponses mélangées

$\frac{1}{x(x+2)}$	$] -8, 8[$	$b = 0$	$-\frac{x}{4}\left(x + \frac{32}{9}\right)$	29	$\left[-\frac{32}{9}, 0\right]$	$] -\infty, -3] \cup [3, +\infty[$
7	6	$\mathbb{R} \setminus \{-8\}$	(b)	1	$[3, +\infty[$	$a = 15$ et $b = -2$ (b)
	$] -\infty, -2] \cup [3, +\infty[$	(a)	(c)	-5 et 5	(b)	$\frac{(x-1)^2}{4x}$ (c)
$] -2, 3]$	-1 et 1	$] -\infty, -3]$	7	x	$[16, +\infty[$	$(-9/2; -1)$
$] 3, +\infty[$	-3	positive	$[3, +\infty[$	(a)	$[-2, 2]$	(b) $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$
0 et $1/42$	$\frac{8}{9}x + 3$	$] -2, +\infty[$	$2bx$	(a)	(a)	(a) $\mathbb{R} \setminus \{-1/2, 5\}$
$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	$] -\infty, -2[\cup [3, +\infty[$	-2	$13/2$	-20	8	$77/85$ 44

► Réponses et corrigés page 234

Représentation graphique des vecteurs

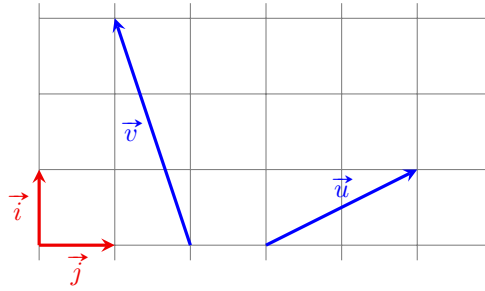


S'entraîner à travailler graphiquement avec les vecteurs

● Calcul 42.1 — Pour commencer.



On considère le graphique suivant :



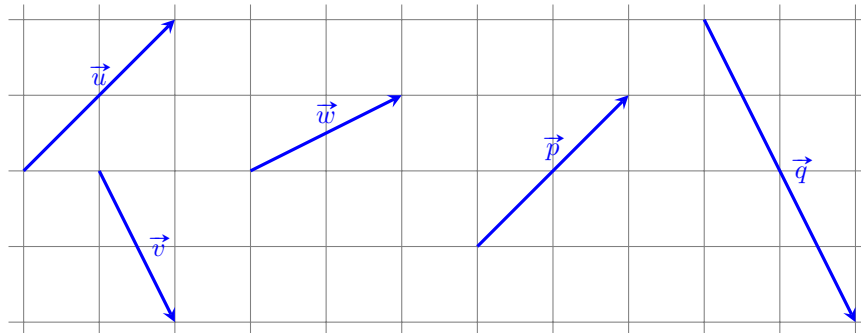
a) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?

b) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$?

● Calcul 42.2



On considère le graphique suivant :



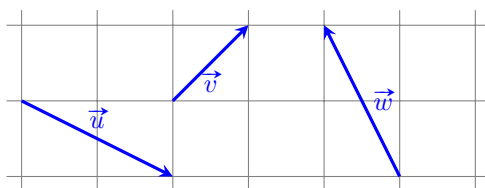
a) Quels sont les deux vecteurs qui sont égaux ?

b) Quel vecteur est colinéaire à $\vec{v}$?

● **Calcul 42.3 — Trouver la bonne somme.**



On considère le graphique suivant :

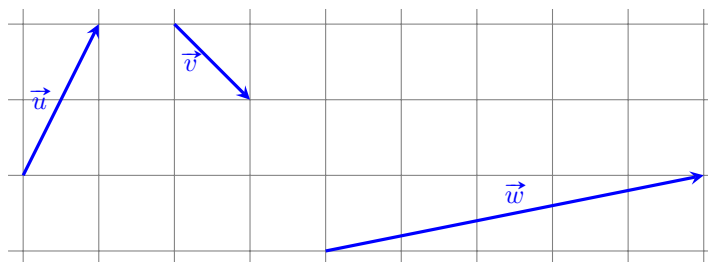


L'un des vecteurs est égal à la somme des deux autres. Écrire cette égalité. ...

● **Calcul 42.4**



On considère le graphique suivant :

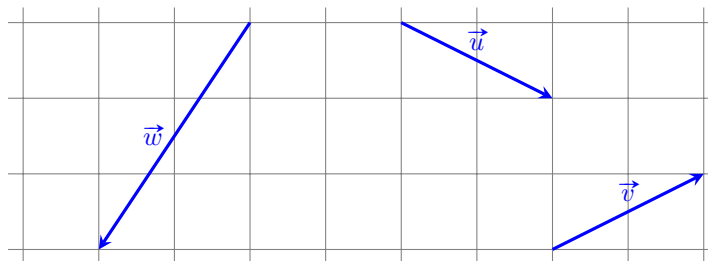


Trouver des nombres a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

● **Calcul 42.5**



On considère le graphique suivant :



Trouver des nombres a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Réponses mélangées

$$\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \quad \vec{q} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v} \quad \vec{u} \text{ et } \vec{p}$$

► Réponses et corrigés page 238

Vecteurs et coordonnées



S'entraîner au calcul en travaillant avec les vecteurs et leurs coordonnées

Dans toute cette fiche, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

● Calcul 43.1 — Lecture graphique des coordonnées d'un vecteur.



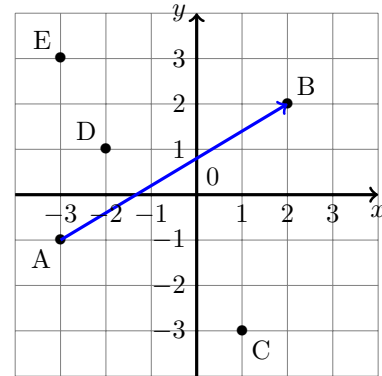
Donner les coordonnées de chacun des vecteurs suivants.

a) $\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AE}$



● Calcul 43.2 — Dessin de points définis par des vecteurs.

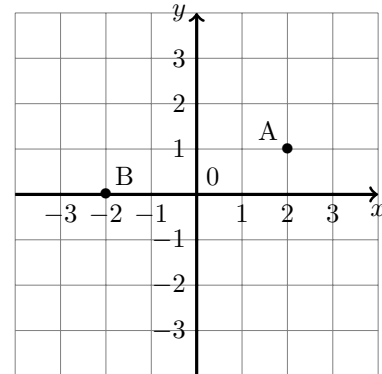


Placer les points suivants sur le graphique :

a) le point C tel que $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) le point D tel que $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) le point E tel que $\overrightarrow{EA} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$



● Calcul 43.3 — Coordonnées de combinaisons linéaires de vecteurs.



On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

On simplifiera les expressions au maximum.

a) $\vec{u} + \vec{v}$

c) $\vec{u} - \vec{w}$

e) $3\vec{u} - 2\vec{v}$

b) $-\vec{w}$

d) $2\vec{v}$

f) $-\frac{5}{4}\vec{v} + \frac{7}{3}\vec{w}$..

● **Calcul 43.4 — Coordonnées d'un vecteur défini par deux points.**



Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On simplifiera les expressions au maximum.

a) $A(-2; 1)$ et $B(-1; -3)$

c) $A(\sqrt{2}; -1)$ et $B(-3\sqrt{8}; \sqrt{3})$

b) $A\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{21}\right)$ et $B\left(\frac{7}{2}; \frac{-5}{14}\right)$

d) $A(-2^n; 3 \times 4^{n+1})$ et $B(2^n; 2^{2n+1})$

● **Calcul 43.5 — Coordonnées du milieu d'un segment.**



Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$.

a) $A(3; -4)$ et $B(-6; 5)$

b) $A\left(\frac{4}{5}; \frac{-25}{6}\right)$ et $B\left(\frac{-7}{3}; \frac{14}{9}\right)$

● **Calcul 43.6 — Détermination de paramètres.**



Soit t un nombre réel. On considère les points $A(1; 0)$, $B(3; -4)$, $C(5; t)$, $D(-2; 3t - 1)$ et $E(2; 6 - 2t)$.

Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur de t permettant de réaliser la propriété donnée.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

b) $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$...

c) $\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

● **Calcul 43.7 — Résolution de deux équations vectorielles.**



a) On considère les deux points du plan $A(-1; 4)$ et $I\left(\frac{3}{2}; 1\right)$.

Calculer les coordonnées du point B tel que I soit le milieu de $[AB]$

b) On considère les points du plan $A(2; -4)$, $B(7; -1)$ et $C(-4; 2)$.

Calculer les coordonnées du point M tel qu'on ait $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc} \left(\frac{-23}{30}; \frac{-47}{36}\right) & \left(\frac{-3}{2}\right) & \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} & 3 & \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} & (4; -2) \\ \begin{pmatrix} 27 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ -41 \\ 42 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ -5 \times 2^{2n+1} \end{pmatrix} & \frac{7}{3} & -8 & \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{-7\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right) & \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 29 \\ 2 \\ -37 \\ 6 \end{pmatrix} & (-46; -4) \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 239

Vecteurs colinéaires et déterminant



Utiliser le déterminant pour étudier la colinéarité de deux vecteurs

Dans cette fiche, on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Consigne

Dans les quatre premiers exercices suivants, on écrira λ sous forme de fraction irréductible ou, si le cas se présente, en tant que nombre entier.

● Calcul 44.1



Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

● Calcul 44.2



Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$.

a) $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \frac{4}{3}\vec{j}$

b) $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{6}{5}\vec{j}$

● Calcul 44.3



Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$, sachant que :

a) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

c) $-2\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

b) $4\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{BC}$

d) $5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = -7\overrightarrow{BC}$

● Calcul 44.4



Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$, sachant que :

a) $A(-4; 3), B(-1; 1), C(5; -3)$

b) $A(-2; 2), B(2; 3), C(6; 4)$

c) $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right), C\left(\frac{15}{2}; \frac{9}{2}\right)$

● Calcul 44.5



Dans chacun des cas suivants, calculer $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

- a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -21 \\ 6 \end{pmatrix}$
- b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix}$
- c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$
- d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$...

● Calcul 44.6



Dans chacun des cas suivants, après avoir calculé le déterminant des vecteurs donnés, déterminer l'unique nombre réel x tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

- a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ x \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
- b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3x \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{x+1}{4} \end{pmatrix}$
- d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 - 2x \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$..

● Calcul 44.7



Dans chacun des cas suivants, exprimer $\det(\vec{u}, \vec{v})$ en fonction de x .

On donnera le résultat sous forme factorisée.

- a) $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2x \\ 3x+1 \end{pmatrix}$...
- b) $\vec{u} \begin{pmatrix} x^2 \\ x \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x^2 - 3x \\ 5x - 1 \end{pmatrix}$
- c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 8x - 12 \\ 2x - 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5x + 7 \\ 2x - 3 \end{pmatrix}$.
- d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3x \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 8 \\ 27x \end{pmatrix}$

● Calcul 44.8



Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

- a) $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2x \\ x+3 \end{pmatrix}$
- b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2x \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2x \end{pmatrix}$
- c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 5x+4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 5x+4 \end{pmatrix}$..
- d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 9x+1 \\ 3x-10 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3x-10 \\ 9x+1 \end{pmatrix}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \frac{5}{9} & \frac{1}{15} & -\frac{3}{4} & \emptyset & \frac{5}{6} & 0 & 8 & 0 & \frac{5}{7} & (9x-4)(9x+4) & \left\{0, \frac{3}{5}\right\} \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 3 & x(x-1) & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & x^2(4x+2) & \frac{1}{11} \\ & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{13}{2} & (2x-3)(3x-19) & \left\{-\frac{11}{6}, \frac{3}{4}\right\} & -31 & \frac{5}{8} & \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\} \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 241

Norme des vecteurs



Manipuler la formule donnant la norme d'un vecteur

Dans cette fiche, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Consigne

Toutes les réponses seront données sous la forme d'un nombre entier ou d'une fraction irréductible, ou encore sous la forme :

$$a\sqrt{b} \quad \text{ou} \quad \frac{a\sqrt{b}}{c},$$

avec a, b et c des entiers, b étant le plus petit possible.

● **Calcul 45.1**

Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur $\vec{u}$.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{5} - \sqrt{3} \\ \sqrt{5} + \sqrt{3} \end{pmatrix}$

● **Calcul 45.2 — Avec deux points.**

Dans chacun des cas suivants, calculer la distance AB.

a) $A(2; -3)$ et $B(-1; -7)$

b) $A\left(-2; \frac{1}{4}\right)$ et $B\left(\frac{-1}{2}; 1\right)$

c) $A(\sqrt{2} - 2; 2\sqrt{2})$ et $B(3\sqrt{2} + 1; 1 - 4\sqrt{2})$

● **Calcul 45.3 — Avec des sommes.**

Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \frac{-9}{5} \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 1 - 5\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix}$..

● **Calcul 45.4 — Premières équations.**



Soit x un nombre réel et soient $A(1; 2-x)$ et $B(x-2; 5)$ deux points du plan. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des valeurs de x telles que la condition donnée soit vraie.

- a) $AB = 3\sqrt{10}$ c) $AB = 4$
- b) $AB = \sqrt{26}$ d) $AB = 3\sqrt{2}$

● **Calcul 45.5**



Soit x un nombre réel. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des valeurs de x telles que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ aient la même norme.

- a) $\vec{u}\begin{pmatrix} x-1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 5-x \end{pmatrix}$
- b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$

● **Calcul 45.6**



Soit x un réel non nul. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des valeurs de x telles que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ aient la même norme.

- a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 7x \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- b) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{2}{x} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
- c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2x+3 \\ 4-x \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x-1 \\ 2x \end{pmatrix}$

● **Calcul 45.7 — Avec des triangles.**



Soit x un nombre réel et soient $A(x; 3)$, $B(5; 4)$ et $C(1; x-1)$ trois points du plan.

- a) Déterminer les valeurs de x telles que le triangle ABC soit isocèle en A.
- b) Déterminer la valeur de x telle que le triangle ABC soit rectangle en B.

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccc} 3\sqrt{10} & x = -3 \text{ et } x = 3 & \frac{\sqrt{229}}{10} & 5 & 4 & 3\sqrt{14} & \{-2, 2\} \\ \{-4\} & \frac{3\sqrt{5}}{4} & \left\{-\frac{2}{7}, \frac{2}{7}\right\} & x = 5 & \frac{\sqrt{13}}{4} & \emptyset & \{0\} & \sqrt{13} \\ 5 & 2\sqrt{10} & \{-6, 6\} & \left\{-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right\} & \frac{3}{2} & \left\{\frac{19}{8}\right\} & \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\} \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 243

Relation de Chasles



S'entraîner à utiliser la relation de Chasles

● Calcul 46.1



Soient A, B, C et D quatre points du plan.

En utilisant la relation de Chasles, écrire, à l'aide d'un seul vecteur, les expressions suivantes.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} \dots\dots\dots$

c) $3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{BD} \dots\dots\dots$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} \dots\dots\dots$

d) $4\overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}) \dots\dots\dots$

● Calcul 46.2



Soit ABCD un parallélogramme. Quelle relation est vraie parmi les propositions suivantes ?

(a) $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

(c) $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

(b) $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

(d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$

.....

● Calcul 46.3

Soient A, B et C trois points du plan. On pose $\vec{u} = 3\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA}$.Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs :

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} \dots\dots\dots$

b) $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC} \dots\dots\dots$

● Calcul 46.4

Soient A, B, C et M quatre points du plan et $\vec{v}$ le vecteur défini par $\vec{v} = 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{CM}$.Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\vec{v}$ en fonction des vecteurs :

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} \dots\dots\dots$

b) $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC} \dots\dots\dots$

c) $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB} \dots\dots\dots$

● Calcul 46.5

Soient D, E, F et G quatre points du plan et $\vec{w}$ le vecteur défini par $\vec{w} = 4\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{GE} + 7\overrightarrow{FG}$.Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\vec{w}$ en fonction des vecteurs :

a) $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EF} \dots\dots\dots$

b) $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF} \dots\dots\dots$

c) $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FE} \dots\dots\dots$

● **Calcul 46.6**



Soient A, B et M trois points du plan tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ s'écrive sous la forme $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, avec x et y deux nombres réels. Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs de x et y .

- a) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA}$ c) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{AM} = \vec{0}$
- b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ d) $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{BM} = \vec{0}$

● **Calcul 46.7**



Soient ABC un triangle et N et P les points définis respectivement par les relations vectorielles :

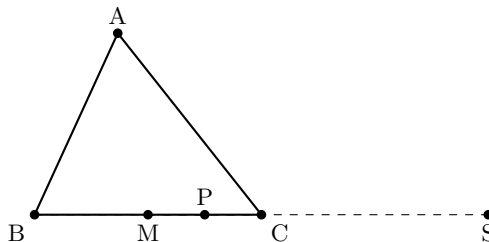
$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

- a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$
- b) En déduire la valeur du réel x tel que $\overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BN}$

● **Calcul 46.8 — Exprimer un vecteur dans une base.**



Soient ABC un triangle et M et P les milieux respectifs des segments [BC] et [MC]. Soit S le symétrique du point B par rapport au point C.



Exprimer les vecteurs suivants dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

- a) $\overrightarrow{AM}$ c) $\overrightarrow{AS}$
- b) $\overrightarrow{AP}$ d) $\overrightarrow{PS}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccc} -3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} & 8\overrightarrow{CD} & -\frac{5}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AC} & 3\overrightarrow{DE} - 7\overrightarrow{DF} & 6\overrightarrow{DB} & 4\overrightarrow{ED} - 7\overrightarrow{EF} \\ x = y = \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} & x = -1 \text{ et } y = \frac{3}{5} & \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} & 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} & \\ -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} & \textcircled{c} & \overrightarrow{DC} & \overrightarrow{DB} & \frac{3}{4} & -2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} & 4\overrightarrow{FD} + 3\overrightarrow{FE} \\ -3\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{BC} & -2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} & x = -1 \text{ et } y = 1 & x = 0 \text{ et } y = \frac{3}{5} & -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} & \end{array}$$

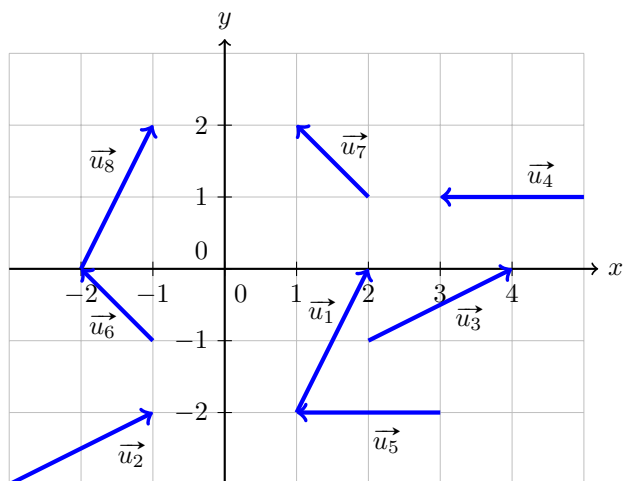
► Réponses et corrigés page 245

Application des vecteurs à la géométrie



Utiliser les vecteurs pour résoudre des problèmes de géométrie

● Calcul 47.1



Pour chacun des vecteurs suivants, déterminer un autre vecteur qui lui est égal.

a) $\vec{u}_1$ c) $\vec{u}_3$

b) $\vec{u}_2$ d) $\vec{u}_4$

Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants.

e) $\vec{u}_5$ g) $\vec{u}_7$

f) $\vec{u}_6$ h) $\vec{u}_8$

● Calcul 47.2



On considère les mêmes vecteurs que dans l'exercice précédent, définis graphiquement.

Déterminer la norme des vecteurs suivants.

a) $\vec{u}_1$ c) $\vec{u}_6$ e) $\vec{u}_1 - \vec{u}_5$

b) $\vec{u}_5$ d) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ f) $\vec{u}_4 - \vec{u}_2 - 2\vec{u}_1$..

● Calcul 47.3 — Alignement de points.



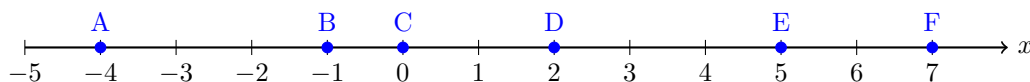
Soit ABC un triangle. On considère le point D tel que $\vec{AD} = \frac{4}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$.

- a) Exprimer $\vec{BC}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$
- b) Exprimer $\vec{BD}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$
- c) Exprimer $\vec{CD}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$
- d) Les points B, C et D sont-ils alignés ?

● **Calcul 47.4**



On considère l'axe suivant, muni de six points :



Dans chacun des cas suivants, déterminer λ pour que l'égalité soit vraie.

a) $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{DE}$

d) $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CD}$

e) $\overrightarrow{DB} = \lambda \overrightarrow{FB}$

c) $\overrightarrow{BA} = \lambda \overrightarrow{BC}$

f) $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{FA}$

● **Calcul 47.5 — Colinéaires ou pas ?**



Dans chacun des cas suivants, les vecteurs sont-ils colinéaires ? Répondre par « oui » ou « non ».

a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 7 \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

b) $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}$

● **Calcul 47.6**



On considère les points A(2;3), B(4;2), C(-2;1) et D(2;-1).

a) Placer les points A, B, C et D sur le repère ci-dessous.

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

b) $\overrightarrow{AC}$

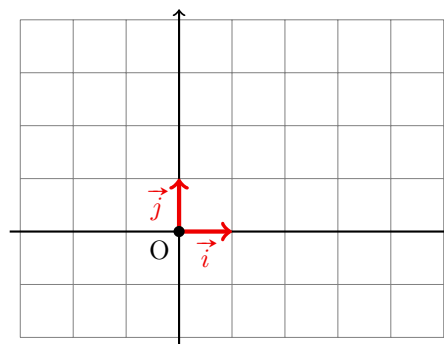
d) $\overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{AB}$

e) $\overrightarrow{BC}$

f) Calculer le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

g) Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?



● **Calcul 47.7**



On considère les points $A(-2;1)$, $B(4;1)$ et $C(-1;2)$.

On note M le milieu de $[AB]$, N le milieu de $[MB]$ et S le point tel que $\vec{SA} + 2\vec{SC} = \vec{0}$.

Déterminer les coordonnées des points suivants :

- a) M b) N c) S
- d) Les droites (CN) et (MS) sont-elles parallèles ?

● **Calcul 47.8 — Parallèles ou pas ?**



Pour chaque question, on donne les coordonnées de quatre points A, B, C et D .

Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Répondre par « oui » ou « non ».

- a) $A(2;2)$, $B(5;4)$, $C(1;4)$ et $D(2;2)$
- b) $A(-\frac{20}{3};2)$, $B(\sqrt{2};1)$, $C(1;1)$ et $D(1;\sqrt{2})$
- c) $A(\frac{1}{3};-2\frac{\sqrt{5}}{9})$, $B(0;0)$, $C(-1;\frac{10\sqrt{5}}{27})$ et $D(-\frac{4}{9};0)$

● **Calcul 47.9 — Parallèles !**



On considère les points $A(\sqrt{5};2)$, $B(5;t)$, $C(1;\frac{4}{3})$ et $D(a;2)$, où a et t sont des réels.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur de a pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

On donnera le résultat sans racine au dénominateur.

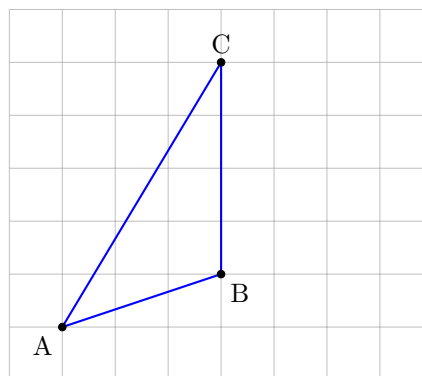
- a) si $t = 0$ b) si $t = 1$ c) si $t = 2 + \sqrt{5}$

● **Calcul 47.10**



On considère le triangle ABC , représenté ci-contre.

- a) Construire le point D tel que $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$
- b) Construire le point E tel que $\vec{BE} + \vec{BA} = \vec{0}$
- c) Est-ce que $\vec{AC} = \vec{BD}$?
- d) $ABDC$ est-il un parallélogramme ?
- e) Trouver le réel λ tel que $\vec{AB} = \lambda\vec{CD}$



Calculs plus difficiles

● Calcul 47.11



On considère trois points $A\left(\frac{3}{2}; 2\right)$, $B\left(-\frac{2}{5}; \frac{3}{7}\right)$ et $C(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du point D pour que les quadrilatères donnés soient des parallélogrammes.

- a) ABCD . b) DBCA . c) ABDC .

● Calcul 47.12 — Droite d'Euler.



On considère un triangle ABC, de centre de gravité G et on note I, J, K les milieux de [BC], [AC] et [AB].

- a) Soit M un point quelconque. Exprimer $\overrightarrow{MK}$ en fonction de $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$

Faire de même pour :

- b) $\overrightarrow{MJ}$ en fonction de $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MC}$

- c) $\overrightarrow{MI}$ en fonction de $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$

Calculer :

- d) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK}$ e) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} \vec{u}_2 & \left(\frac{11}{10} - \sqrt{2}; \frac{17}{7} + \sqrt{2}\right) & \vec{0} & -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} & \sqrt{61} & \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{5} & \text{non} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \left(-\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right) & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{oui} & 2 \\ \text{oui} & \text{oui} & \vec{u}_3 & \text{oui} & \sqrt{5} & \left(-\frac{19}{10} + \sqrt{2}; -\frac{11}{7} - \sqrt{2}\right) & \vec{0} & \sqrt{13} & \text{non} & -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ -3 & \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} & 3\sqrt{2} & 1 & \text{oui} & \left(\frac{19}{10} + \sqrt{2}; \frac{11}{7} - \sqrt{2}\right) & \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} & (1; 1) \\ \text{oui} & \vec{u}_5 & \text{oui} & \vec{u}_8 & \sqrt{2} & \text{non} & 2 & \text{oui} & \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} & 1 & -\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{5} \\ \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} & \frac{3}{8} & \text{non} & \left(\frac{5}{2}; 1\right) & -\frac{2}{11} & \frac{1}{2} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} & 0 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 248

Barycentres



S'entraîner au travail avec les barycentres

Remarque

Cette fiche est uniquement destinée aux élèves ayant étudié les barycentres en classe.

Dans toute cette fiche, on se place dans le plan, muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

● Calcul 48.1 — Pour commencer.



On considère G le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b) . Calculer les coordonnées de G dans chacun des cas suivants.

a) $a = 1, b = 1$ et $A(3; 6), B(5; 10)$

c) $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ et $A(2; 4), B(2; 7)$

b) $a = 3, b = 4$ et $A(-1; 5), B(2; -6)$

d) $a = \frac{2}{7}, b = \frac{2}{5}$ et $A(1; 5), B(2; 7)$

● Calcul 48.2



On considère G le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) . Calculer les coordonnées de G dans chacun des cas suivants.

a) $a = 3, b = -4, c = 2$ et $A(1; 5), B(2; 6), C(1; 1)$

b) $a = 1, b = 1, c = 1$ et $A(0; 0), B(0; 2)$ et $C(1; 3)$

c) $a = 2, b = 3, c = 5$ et $A(3; 6), B(-5; 2)$ et $C(1; -4)$

● Calcul 48.3



On a placé plusieurs points sur un axe gradué.



a) Quel point (parmi C, D, E et F) est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 3)$?

b) Quels sont les coefficients affectés respectivement à A et à B pour que D en soit le barycentre?

(a) 1 et -1

(b) 2 et 2

(c) 3 et 3

.....

c) On suppose que F est le barycentre de $(A, 1)$ et (B, b) . Calculer la valeur de b

● **Calcul 48.4**



On considère plusieurs points, représentés sur la figure ci-contre.

a) Quel point est le barycentre de

$(A, 1)$ et $(C, 1)$?

(a) D

(b) E

(c) F

.....

b) Quel point est le barycentre de

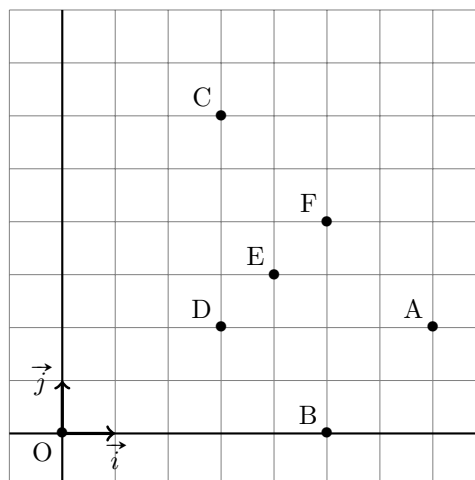
$(B, -1)$ et $(C, -1)$?

(a) D

(b) E

(c) F

.....



c) On suppose que D est le barycentre de $(A, -1)$, (B, b) et (C, c) . Déterminer les valeurs de b et de c .

.....

● **Calcul 48.5**



On considère A le point de coordonnées $(3; 0)$ et B le point de coordonnées $(6; 3)$. Soit λ un réel.

On note G le barycentre des points pondérés $(A, 1 - \lambda)$ et (B, λ) .

a) Exprimer les coordonnées $(x_G; y_G)$ de G en fonction de λ

b) Exprimer y_G en fonction de x_G

c) Encadrer x_G pour λ compris entre 0 et 1.

d) Encadrer y_G pour λ compris entre 0 et 1.

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 3 \leq x_G \leq 6 & G\left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right) & (3 + 3\lambda; 3\lambda) & G\left(\frac{5}{7}; -\frac{9}{7}\right) & G\left(\frac{19}{12}; \frac{37}{6}\right) & & \\
 y_G = x_G - 3 & E & (b) & 0 \leq y_G \leq 3 & -3 & (b) \text{ ou } (c) & \\
 G\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right) & G(4; 8) & (c) & G(-3; -7) & G(2; 6) & b = 2 \text{ et } c = 1 &
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 252

Vecteurs directeurs d'une droite



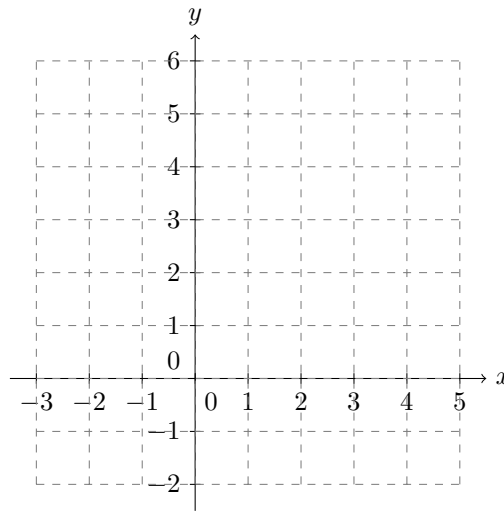
S'entraîner à raisonner et à calculer avec les vecteurs directeurs

● Calcul 49.1 — Quelques dessins de droites.



Tracer, dans le repère donné ci-dessous, chacune des droites suivantes :

- a) la droite (D_1) passant par $A_1(2; 4)$ et dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$;
- b) la droite (D_2) passant par $A_2(-1; 5)$ et dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$;
- c) la droite (D_3) passant par $A_3(0; -2)$ et dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



● Calcul 49.2 — Des équations de droites.



Dans chacun des cas suivants, donner l'équation réduite de la droite passant par le point A et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

- a) $A(2; -3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
- b) $A(-1; 5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
- c) $A(0; 4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$
- d) $A(3; 0)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$
- e) $A(-2; -4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

● Calcul 49.3



Dans chacun des cas suivants, choisir parmi les réponses proposées les vecteurs qui sont des vecteurs directeurs de la droite (D) .

Dans chaque cas, il peut y avoir plusieurs vecteurs directeurs.

a) (D) est la droite d'équation cartésienne $2x - 5y + 10 = 0$.

(a) $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{u}_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

.....

b) (D) est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

(a) $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{u}_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

.....

c) (D) est la droite d'équation cartésienne $4x + 6y - 12 = 0$.

(a) $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{u}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{u}_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

.....

● Calcul 49.4



On considère les points $M(1; 2)$ et $N(4; -2)$.

Parmi les équations suivantes, lesquelles correspondent à des droites admettant $\overrightarrow{MN}$ pour vecteur directeur ?

(a) $6x + 4y - 5 = 0$

(c) $4x + 3y - 1 = 0$

(b) $-4x + 3y + 7 = 0$

(d) $-8x - 6y + 3 = 0$

.....

● Calcul 49.5



Une droite (D) passe par le point A et est parallèle à la droite (Δ) .

Dans chacun des cas suivants, choisir les équations cartésiennes définissant (D) .

a) $A(-2; 4)$ et $(\Delta) : 3x + 2y - 5 = 0$

b) $A(0; 0)$ et $(\Delta) : 6x - 2y + 1 = 0$

(a) $3x + 2y + 14 = 0$

(c) $6x + 4y + 5 = 0$

(a) $3x - y = 0$

(c) $6x + 2y - 1 = 0$

(b) $3x + 2y - 2 = 0$

(d) $6x - 4y + 1 = 0$

(b) $6x - 2y = 0$

(d) $3x + y - 1 = 0$

.....

.....

Réponses mélangées

$y = 4$ $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ (a), (b) et (c) (a) et (b) (b) (b)
 $x = 3$ (a), (b) et (d) $y = x - 2$ (c) et (d) $y = -4x + 5$

► Réponses et corrigés page 254

Équations de droites



Faire le lien entre équation, pente et représentation graphique d'une droite

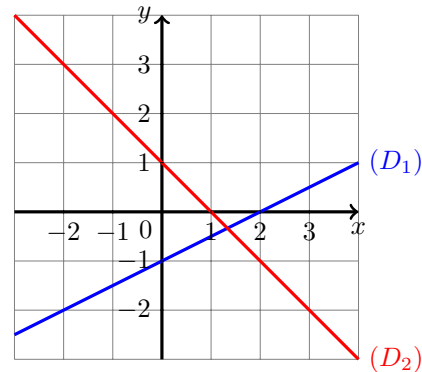
● Calcul 50.1



Parmi les affirmations suivantes, déterminer lesquelles sont vraies.

- (a) Le point $A(4; 1)$ appartient à (D_1) .
- (b) Le point $B(2; -1)$ appartient à (D_2) .
- (c) Le point $C(-1; 0)$ appartient à (D_1) .
- (d) Le point $E(-2; -2)$ appartient à (D_2) .

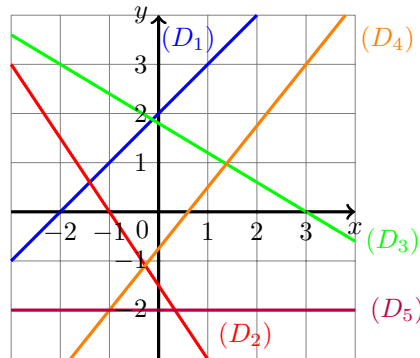
.....



● Calcul 50.2 — Lecture graphique de pentes.



On considère les droites (D_1) , (D_2) , (D_3) , (D_4) et (D_5) ci-dessous.



a) Choisir parmi les propositions suivantes la pente de la droite (D_1) .

- (a) -2
- (b) -1
- (c) 1
- (d) 2

.....

b) Choisir parmi les propositions suivantes la pente de la droite (D_2) .

- (a) $\frac{2}{3}$
- (b) $\frac{3}{2}$
- (c) $-\frac{2}{3}$
- (d) $-\frac{3}{2}$

.....

Déterminer la pente des droites suivantes.

c) (D_3) d) (D_4) e) (D_5)

● **Calcul 50.3**



Dans chacun des cas suivants, déterminer si le point A appartient à la droite (D).

On répondra par « oui » ou « non ».

a) $A(2; -1)$ et $(D) : 2x + 3y + 1 = 0$

b) $A(3; 5)$ et $(D) : 7x - 4y - 1 = 0$

c) $A\left(\frac{3}{2}; \frac{-1}{3}\right)$ et $(D) : \frac{1}{2}x + 4y + \frac{7}{12} = 0$

● **Calcul 50.4 — Intersection d'une droite avec l'axe des abscisses.**



Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (D) avec l'axe des abscisses.

a) $(D) : 4x + y + 6 = 0$

b) $(D) : -\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}y + \frac{3}{4} = 0$

c) $(D) : 2 \times 4^{n+1}x - 3^{2n-1}y + 2^{3n+2} = 0$ (où $n \in \mathbb{N}$)

● **Calcul 50.5 — Combien vaut la pente ?**



On considère les points $A(2; -1)$ et $B(-1; 3)$.

Choisir parmi les propositions suivantes la pente de la droite (AB).

Ⓐ $\frac{3}{4}$

Ⓑ $\frac{4}{3}$

Ⓒ $-\frac{3}{4}$

Ⓓ $-\frac{4}{3}$

.....

● **Calcul 50.6**



Dans chacun des cas suivants, calculer la pente de la droite (AB).

a) $A(-7; -10)$ et $B(5; -2)$

b) $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ et $B\left(\frac{-1}{4}; \frac{1}{2}\right)$

c) $A(-\sqrt{2}; \sqrt{24})$ et $B(\sqrt{2}; \sqrt{6})$

● **Calcul 50.7**



Dans chacun des cas suivants, calculer la pente de la droite (D) .

- a) $(D) : y = 4x - 1$ c) $(D) : 5x - 3y + 4 = 0$
- b) $(D) : 3x + y - 2 = 0$ d) $(D) : 8x + 12y + 3 = 0$

● **Calcul 50.8 — Détermination de paramètres.**



Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur du paramètre réel m pour que le point A appartienne à la droite (D) .

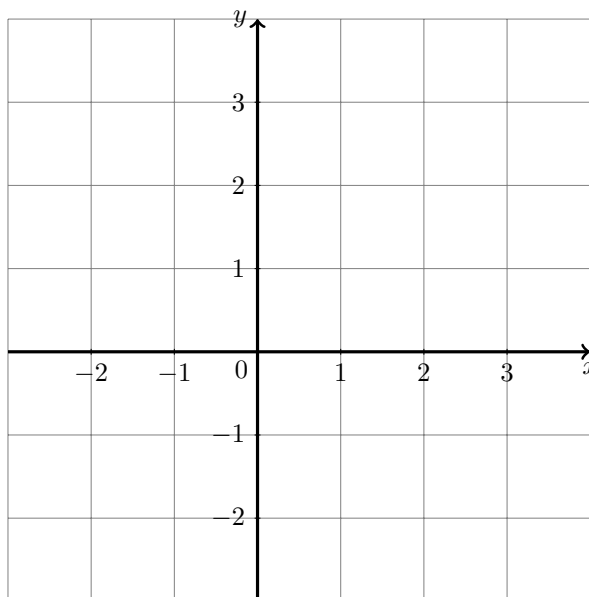
- a) $A(-1; 1)$ et $(D) : mx + (3 - m)y + 1 = 0$
- b) $A(2; m)$ et $(D) : -2mx + y + 5 = 0$
- c) $A(-m + 1; 2m - 3)$ et $(D) : (m + 2)x + (2m + 3)y - 3m^2 = 0$

● **Calcul 50.9 — Tracés de droites (I).**



Tracer les droites suivantes sur le graphique ci-dessous :

- a) la droite (D_1) de pente -1 et d'ordonnée à l'origine 2
- b) la droite (D_2) de pente $\frac{1}{3}$ et d'ordonnée à l'origine 0
- c) la droite (D_3) de pente $-\frac{1}{2}$ et d'ordonnée à l'origine $-\frac{1}{2}$
- d) la droite (D_4) de pente 2 et d'ordonnée à l'origine -4

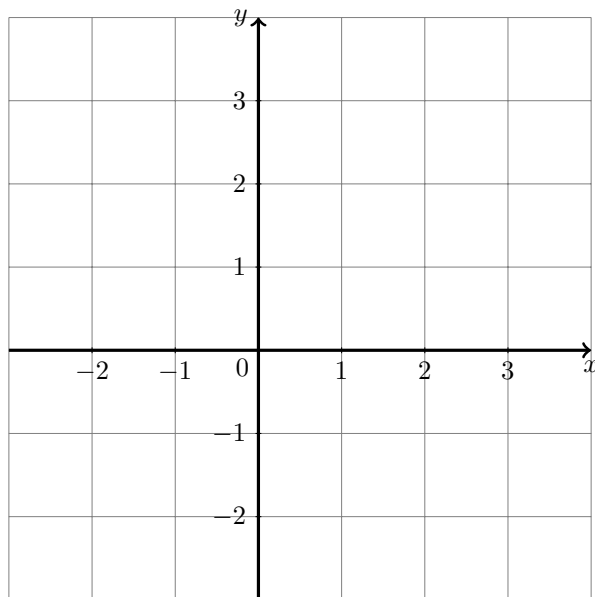


● **Calcul 50.10 — Tracés de droites (II).**



Tracer les droites suivantes sur le graphique ci-dessous.

- | | |
|---|---|
| a) la droite (D_1) d'équation $y = 2x - 1$ | c) la droite (D_3) d'équation $y = -\frac{5}{2}$ |
| b) la droite (D_2) d'équation $y = -\frac{1}{3}x + 2$ | d) la droite (D_4) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ |

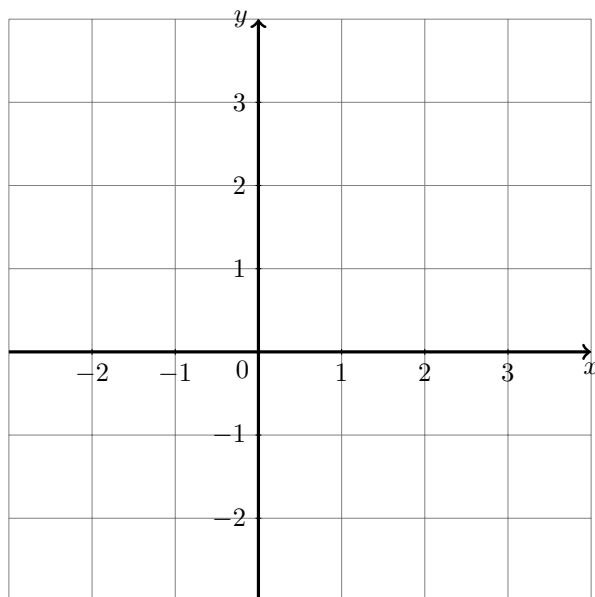


● **Calcul 50.11 — Tracés de droites (III).**



Tracer les droites suivantes sur le graphique ci-dessous.

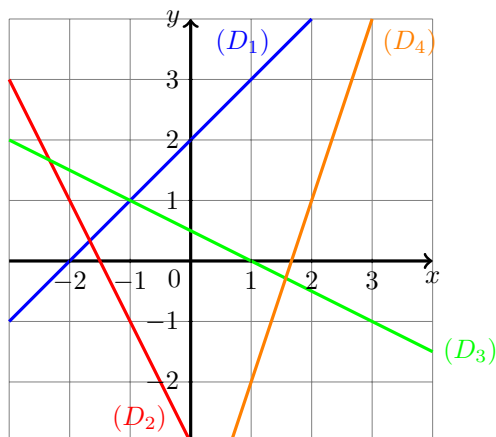
- | | |
|---|---|
| a) la droite (D_1) d'équation $x = 3$ | c) la droite (D_3) d'équation $x - 2y - 3 = 0$ |
| b) la droite (D_2) d'équation $6x - 3y + 3 = 0$ | d) la droite (D_4) d'équation $5x + 2y + 7 = 0$ |



● **Calcul 50.12 — Lecture graphique d'une équation de droite (I).**



On considère les droites (D_1) , (D_2) , (D_3) et (D_4) ci-dessous.



a) Choisir parmi les propositions suivantes l'équation réduite de la droite (D_1) .

- (a) $y = x - 2$
- (b) $y = x + 2$
- (c) $y = 2x + 1$
- (d) $y = 2x + 2$

.....

Déterminer les équations réduites des droites suivantes.

b) (D_2)

d) (D_4)

c) (D_3)

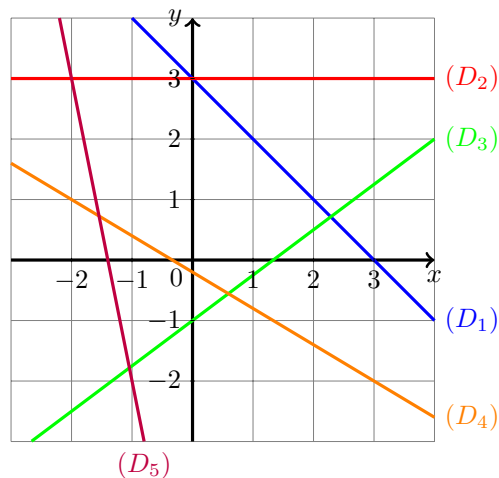
● **Calcul 50.13 — Lecture graphique d'une équation de droite (II).**



On considère les droites

(D_1) , (D_2) , (D_3) , (D_4) et (D_5) ,

tracées ci-contre.



Déterminer les équations réduites des droites suivantes.

a) (D_1)

d) (D_4)

b) (D_2)

e) (D_5)

c) (D_3)

● **Calcul 50.14 — Calcul d'une équation de droite (I).**



a) On considère le point $A(1; 2)$.

Quelle est l'équation réduite de la droite (D) de pente 3 et passant par A ?

- (a) $y = 3x - 1$ (b) $y = 3x + 1$ (c) $y = 3x + 2$ (d) $y = 2x + 3$

.....

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la droite (D) .

b) La droite (D) a pour pente 6 et passe par le point $A(0; -2)$

c) La droite (D) a pour pente -2 et passe par le point $A(2; -3)$

d) La droite (D) a pour pente $\frac{3}{2}$ et passe par le point $A(-\frac{1}{2}; \frac{1}{8})$

● **Calcul 50.15 — Calcul d'une équation de droite (II).**



a) On considère les points $A(-2; -1)$ et $B(0; 3)$.

Quelle est l'équation réduite de la droite (AB) ?

- (a) $y = 2x + 1$ (b) $y = -2x + 1$ (c) $y = 2x + 3$ (d) $y = -2x + 3$

.....

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la droite (AB) .

b) $A(-3; 2)$ et $B(5; 4)$

c) $A(\frac{5}{3}; -\frac{1}{6})$ et $B(-\frac{3}{2}; \frac{5}{4})$

d) $A(3 \times 5^{n+1}; 4^{3n+6})$ et $B(-2 \times 7^n; 8^{2n+4})$, où $n \in \mathbb{N}$

Réponses mélangées

oui	(a)	(d)	$y = -5x - 7$	oui	$y = 3$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{5}{3}$	$y = -x + 3$
$y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$		$y = -2x + 1$	$y = -\frac{17}{38}x + \frac{11}{19}$	$(\frac{3}{2}; 0)$	$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		
$(-\frac{3}{2}; 0)$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	4	(d)	$y = 2^{6n+12}$	$(-2^{n-1}; 0)$	$y = 6x - 2$	
-3	0	(a) et (b)	$y = 3x - 5$	$\frac{2}{3}$	$y = \frac{3}{4}x - 1$	-7	$y = \frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$	
$\frac{5}{4}$	non	2	$y = -2x - 3$	$-\frac{3}{5}$	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	(b)	(c)	(c)

► Réponses et corrigés page 256

Droites parallèles et équations de droites



Étudier le parallélisme de deux droites à l'aide de leurs équations

● Calcul 51.1 — Droite parallèle à un axe ?



Parmi les affirmations suivantes, déterminer lesquelles sont vraies.

- (a) La droite d'équation $y = 2$ est parallèle à l'axe des abscisses.
- (b) La droite d'équation $y = 2$ est parallèle à l'axe des ordonnées.
- (c) La droite d'équation $x = -\frac{1}{4}$ est parallèle à l'axe des ordonnées.
- (d) La droite d'équation $3x - 5 = 0$ est parallèle à l'axe des abscisses.

.....

● Calcul 51.2 — Parallélisme de deux droites définies par deux points.



On considère les points :

$$A(1; 2), \quad B(5; -3), \quad C(-2; 7) \quad \text{et} \quad D(6; -3).$$

a) Calculer la pente de la droite (AB).

b) Calculer la pente de la droite (CD).

c) Déterminer si « oui » ou « non » les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

● Calcul 51.3 — Alignement de trois points.



On considère les points :

$$A\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{4}\right), \quad B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right) \quad \text{et} \quad C\left(\frac{-25}{6}; \frac{11}{6}\right).$$

a) Calculer la pente de la droite (AB).

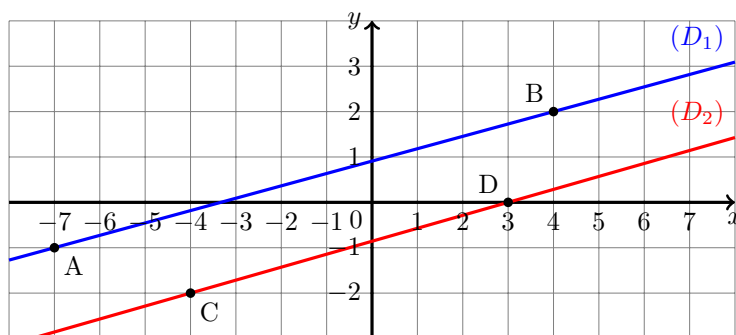
b) Calculer la pente de la droite (AC).

c) Déterminer si « oui » ou « non » les points A, B et C sont alignés.

● **Calcul 51.4 — Être ou ne pas être parallèle (I) ?**



On considère les droites (D_1) et (D_2) ci-dessous.



a) Déterminer la pente de la droite (D_1)

b) Déterminer la pente de la droite (D_2)

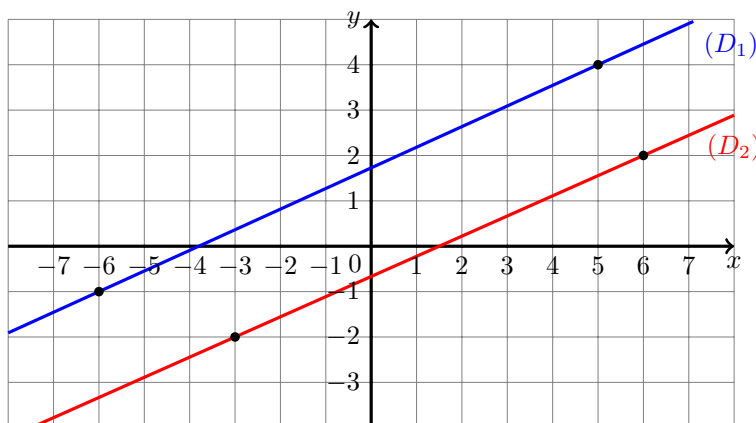
c) Calculer $\frac{3}{11} - \frac{2}{7}$

d) Parmi les droites (D_1) et (D_2) , laquelle a la plus grande pente?

● **Calcul 51.5 — Être ou ne pas être parallèle (II) ?**



On considère les droites (D_1) et (D_2) ci-dessous.



Parmi les affirmations suivantes, déterminer laquelle est vraie.

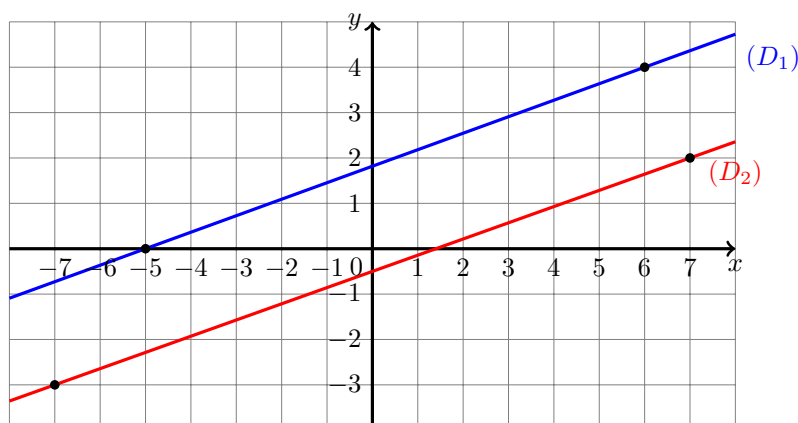
- (a) La droite (D_1) est parallèle à la droite (D_2) .
- (b) La droite (D_1) a une plus grande pente que la droite (D_2) .
- (c) La droite (D_1) a une plus petite pente que la droite (D_2) .

.....

● **Calcul 51.6 — Être ou ne pas être parallèle (III) ?**



On considère les droites (D_1) et (D_2) ci-dessous.



Parmi les affirmations suivantes, déterminer laquelle est vraie.

- (a) La droite (D_1) est parallèle à la droite (D_2) .
- (b) La droite (D_1) a une plus grande pente que la droite (D_2) .
- (c) La droite (D_1) a une plus petite pente que la droite (D_2) .

.....

● **Calcul 51.7 — Vrai ou faux ?**



On considère les points $A(-3; 5)$, $B(-5; -3)$, $C(1; -5)$, $D(2; -1)$, $E(-10; 2)$ et $F(-4; 1)$.

Déterminer si « oui » ou « non » les affirmations suivantes sont vraies.

a) Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

b) Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

c) Les points A , B et F sont alignés.

● **Calcul 51.8 — Parallélisme de deux droites définies par leurs équations.**



Dans chacun des cas suivants, déterminer si « oui » ou « non » les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

a) $(D_1) : y = 3x + 1$ et $(D_2) : y = 2x + 1$

b) $(D_1) : 4x - 6y + 5 = 0$ et $(D_2) : -6x + 9y - 1 = 0$

c) $(D_1) : 12x + 8y - 3 = 0$ et $(D_2) : -8x - 4y + 5 = 0$

d) $(D_1) : \frac{6}{35}x + \frac{5}{14}y - \frac{193}{35} = 0$ et $(D_2) : \frac{33}{25}x + \frac{11}{4}y - \frac{147}{23} = 0$

● **Calcul 51.9 — Trouver la bonne valeur du paramètre.**



Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur du paramètre réel m pour que les droites (D_1) et (D_2) soient parallèles.

a) $(D_1) : y = 5x + 2$ et $(D_2) : y = (3m + 1)x - 3$

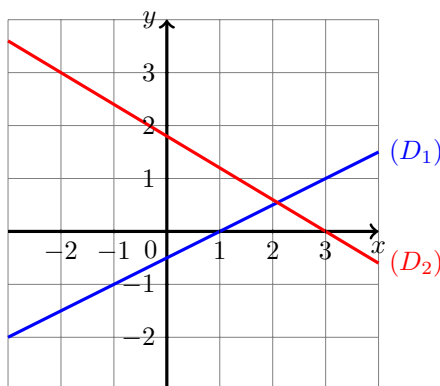
b) $(D_1) : y = (m + 1)x - 1$ et $(D_2) : y = (2m - 1)x + m$

c) $(D_1) : \frac{m}{2}x - 3y + 1 = 0$ et $(D_2) : x + \frac{1}{2m+1}y - 4 = 0$

● **Calcul 51.10 — Point d'intersection de deux droites.**



On considère les droites (D_1) et (D_2) ci-dessous.



a) Déterminer l'équation réduite de la droite (D_1)

b) Déterminer l'équation réduite de la droite (D_2)

On note $(x_0 ; y_0)$ les coordonnées du point d'intersection des droites (D_1) et (D_2) .

c) Dédire des questions précédentes la valeur de x_0

d) En déduire la valeur de y_0

Réponses mélangées

oui	⑥	① et ③	oui	$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$	oui	$-\frac{5}{14}$	$-\frac{5}{4}$
$-\frac{5}{4}$	$\frac{3}{11}$	$y = -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5}$	$\frac{4}{3}$	oui non	$\frac{23}{11}$	$-\frac{1}{77}$	(D_2)
non	$\frac{2}{7}$	non	⑥	$-\frac{6}{13}$	2	oui	$\frac{6}{11}$

► Réponses et corrigés page 260

Proportions



Utiliser des pourcentages et des fractions dans le calcul de proportions

● Calcul 52.1 — Pour commencer.



Écrire les nombres suivants sous forme décimale, puis sous forme de pourcentage.

Par exemple, on a $\frac{12}{100} = 0,12 = 12\%$.

a) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{34}{200}$

● Calcul 52.2 — Différentes écritures.



a) Écrire 0,32 sous forme d'un pourcentage.

b) Écrire 83 % sous forme d'une valeur décimale.

c) Écrire 30 % sous forme d'une fraction irréductible.

d) Écrire $\frac{3}{2}$ sous forme d'un pourcentage.

● Calcul 52.3 — Effectifs et proportions.



Une municipalité commande des plantes pour le fleurissement de la ville : 300 pétunias, 850 géraniums, 600 bégonias et pour finir des dipladénias, soit 2 000 plants au total.

a) Calculer sous forme décimale la proportion de géraniums dans la commande.

b) Calculer sous forme de pourcentage la proportion de bégonias dans la commande.

c) Calculer sous forme de fraction la proportion de dipladénias dans la commande.

● Calcul 52.4



Dans une classe, il y a 24 élèves.

a) Un tiers des élèves de la classe suivent l'option latin. Calculer le nombre de latinistes. ...

b) Les passionnés de jeux vidéos représentent 25 % de l'effectif. Calculer leur nombre.

c) Il y a 12 filles dans la classe. Calculer la proportion de filles sous la forme d'un pourcentage.

● Calcul 52.5



a) Dans une boîte, 9 stylos sont défectueux, ce qui représente 15 % du total.

Calculer le nombre de stylos dans la boîte.

.....

b) Dans un lycée, 37 % des élèves sont demi-pensionnaires, soit 851 lycéens.

Calculer le nombre d'élèves dans le lycée.

.....

c) Dans un aquarium, il y a 12 esturgeons, soit un tiers des poissons.

Calculer le nombre total de poissons dans l'aquarium.

.....

● Calcul 52.6



a) Dans une basse-cour, la moitié des animaux sont des lapins et, parmi les lapins, le quart sont des Géants des Flandres. Calculer la proportion de lapins Géants des Flandres dans la basse-cour, sous forme d'un pourcentage.

.....

b) Au rayon peinture d'une droguerie, 65 % des peintures sont acryliques et, parmi celles-ci, 40 % sont applicables en extérieur. Calculer la proportion de peintures acryliques extérieures vendues par le magasin, sous forme de fraction irréductible.

.....

c) Dans une exploitation maraîchère, le quart de la surface est cultivée en salades et, parmi les salades, 32 % sont des laitues. Calculer la proportion de surface en laitues dans l'exploitation, sous forme de nombre décimal.

.....

● Calcul 52.7



Dans une colonie de vacances, 10 % des participants ont moins de 10 ans. De plus, 80 % des personnes ayant moins de dix ans ont moins de 8 ans. Il y a 48 enfants de moins de 8 ans dans la colonie.

Calculer le nombre de participants.

● Calcul 52.8



Il y a N personnes dans une salle. La proportion de personnes majeures parmi ces N personnes vaut p . Parmi les majeurs, il y a n personnes qui ont le permis. Parmi les mineurs, aucun n'a le permis.

a) Calculer la proportion de majeurs ayant le permis.

b) Calculer la proportion de personnes n'ayant pas le permis.

Réponses mélangées

0,83	2 300	0,08	$\frac{1}{8}$	$\frac{13}{50}$	30 %	150 %	$\frac{N-n}{N}$
0,25 = 25 %		12,5 %	0,5 = 50 %		8	60	$\frac{n}{Np}$
0,17 = 17 %	6	50 %	$\frac{3}{10}$	0,425	600	36	0,2 = 20 %

► Réponses et corrigés page 263

Taux d'évolution



S'entraîner à la manipulation des coefficients multiplicateurs

● Calcul 53.1



- a) Un paquet de farine de blé coûte 1,20 €. Son prix augmente de 10 %.

Calculer le nouveau prix de ce paquet de farine.

- b) Le prix du kilowattheure d'électricité a baissé de 15 %.

Calculer par combien le prix du kWh a été multiplié.

- c) Un pantalon coûte initialement 60 €. Il est ensuite soldé de 30 %.

Calculer le nouveau prix de ce pantalon.

- d) Le nombre de frelons asiatiques a augmenté de 200 % en cinq ans.

Calculer par combien la population de frelons asiatiques a été multipliée.

● Calcul 53.2 — Des pourcentages au coefficient multiplicateur.



Calculer le coefficient multiplicateur associé à la variation en pourcentage proposée.

- a) Une hausse de 30 %

- d) Une baisse de 10 %

- b) Une hausse de 52 %

- e) Une baisse de 50 %

- c) Une hausse de 100 %

- f) Une baisse de 100 %

● Calcul 53.3 — Du coefficient multiplicateur aux pourcentages.



Traduire par une évolution en pourcentage.

- a) Multiplier par 1,2

- d) Multiplier par 0,5

- b) Multiplier par 1,5

- e) Diviser par 2

- c) Multiplier par 0,9

- f) Diviser par 4

● **Calcul 53.4 — Retrouver la quantité initiale.**



a) La population de truites dans un bassin augmente de 25 % en un an pour arriver à 455.

Calculer l'effectif initial.

.....

b) Le jour de ses 10 ans, la taille d'un enfant est de 140,4 cm. Elle a augmenté de 8 % au cours de sa dixième année. Calculer sa taille le jour de ses 9 ans.

.....

c) Un livret d'épargne est rémunéré au taux annuel de 2 %. Le montant des intérêts versés est de 58 €. Calculer la somme initiale.

.....

● **Calcul 53.5**



Le nombre de clients d'un restaurant est passé de 300 en janvier à 360 en février.

a) Calculer la variation absolue entre janvier et février.

Calculer le taux d'évolution entre janvier et février :

b) sous forme d'un nombre décimal ...

c) sous forme d'un pourcentage

d) L'augmentation de février à mars est de 5 %.

Calculer le nombre de clients en mars.

e) Calculer le taux d'évolution global de janvier à mars, en pourcentage.

f) En avril, il y a autant de clients qu'en janvier. La baisse de fréquentation de mars à avril est :

(a) de 26 %

(b) supérieure à 26 %

(c) inférieure à 26 %

.....

● **Calcul 53.6 — Quelle est la meilleure promo ?**



a) Quelle promotion est la plus intéressante ?

(a) Une baisse de 30 %

(c) Une première baisse de 20 % puis une baisse de 10 %

(b) Deux baisses successives de 15 %

.....

b) Quelle promotion est la plus intéressante, sachant qu'on veut acheter trois produits identiques ?

(a) Une baisse de 30 %

(c) Le deuxième à moitié prix

(b) Deux achetés, un offert

.....

● **Calcul 53.7**



Pour chacune des questions suivantes, choisir la bonne réponse.

a) Une population a augmenté de 15 %. Pour revenir à l'effectif initial, il doit y avoir une baisse :

- (a) inférieure à 15 % (b) égale à 15 % (c) supérieure à 15 %

.....

b) Une population a baissé de 15 %. Pour revenir à l'effectif initial, il doit y avoir une hausse :

- (a) inférieure à 15 % (b) égale à 15 % (c) supérieure à 15 %

.....

c) Une population a doublé. Pour revenir à l'effectif initial, il doit y avoir une baisse :

- (a) égale à 100 % (b) égale à 50 % (c) égale à 25 %

.....

● **Calcul 53.8 — Taux d'évolution réciproque.**



Calculer les taux d'évolution réciproque sous forme de fraction irréductible.

a) Pour une hausse de 20 %

c) Pour une hausse de 100 %

b) Pour une baisse de 10 %

d) Pour une baisse de 50 %

● **Calcul 53.9 — Des formules générales.**



On considère une population de taille initiale I et de taille finale F .

a) Calculer le taux d'évolution en fonction de I et de F

b) Calculer le taux d'évolution sous la forme d'un pourcentage.

c) Calculer le coefficient multiplicateur.

d) Calculer le coefficient multiplicateur réciproque.

e) Calculer le taux d'évolution réciproque.

f) Calculer le taux d'évolution réciproque sous la forme d'un pourcentage.

Calculs plus difficiles

● Calcul 53.10



On considère une population de taille N . Calculer en fonction de N la taille de population obtenue pour chacune des actions suivantes :

a) Augmenter de 30 % puis diminuer de 30 % la population

b) Baisser la population trois fois successivement de 5 %

● Calcul 53.11



a) Dans un troupeau, le nombre de brebis a augmenté en 2 ans de 44 %.

Calculer le taux annuel moyen d'évolution de ce troupeau, en pourcentage.

b) Une taxe a augmenté sur 2 ans de 21 %.

Calculer le taux annuel moyen d'évolution en pourcentage de cette taxe.

● Calcul 53.12 — Augmentation d'augmentations.



Une population compte initialement un effectif de N individus.

- La première année, il y a une augmentation de 5 %.
- Les deux années suivantes, l'augmentation progresse de 20 %.

a) Calculer l'augmentation prévue pour la deuxième année en pourcentage.

b) Calculer l'augmentation prévue la troisième année en pourcentage.

c) Calculer l'effectif de la population à la fin des trois années.

On donnera le résultat sous forme d'un produit.

.....

Réponses mélangées

$\frac{F}{I}$	ⓑ	$0,95^3 \times N$	ⓐ	42 €	0,5	$\frac{1}{9}$	1,32 €	364	20 %
-50 %	2900	$\frac{F-I}{I}$	130	$0,91 \times N$	1,193	$136 \times N$	1,52	+20 %	
0,85	378	$\frac{F-I}{I} \times 100 \%$	6 %	$\frac{-1}{2}$	ⓑ	$\frac{-1}{6}$	$\frac{I}{F}$	ⓐ	ⓐ
1,3	60	$\frac{I-F}{F} \times 100 \%$	26 %	-75 %	0,2	+50 %	3	7,2 %	
10 %	1	20 %	2	$\frac{I-F}{F}$	ⓐ	-50 %	0	0,9	-10 %

► Réponses et corrigés page 265

Généralités sur les probabilités



S'entraîner au calcul de probabilités

● Calcul 54.1 — En lançant un dé.



On dispose d'un dé équilibré à 6 faces, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

a) On lance le dé et on note p la probabilité d'obtenir un nombre pair et q la probabilité d'obtenir un multiple de 3. Choisir la bonne réponse :

(a) $p = q$

(b) $p < q$

(c) $p > q$

.....

b) Combien vaut la probabilité de ne pas obtenir de multiple de 3?

● Calcul 54.2 — En lançant deux dés.



On dispose de deux dés équilibrés à 6 faces, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On les lance l'un après l'autre. Combien vaut la probabilité :

a) d'obtenir un 3 puis un 5?

b) d'obtenir deux fois la même valeur?

c) que le plus grand des numéros soit égal à 6?

● Calcul 54.3



Une pièce truquée est lancée une unique fois. Cette pièce peut renvoyer la valeur « Pile » ou la valeur « Face ». La probabilité qu'elle renvoie « Pile » est deux fois plus grande que la probabilité qu'elle renvoie « Face ».

Combien vaut la probabilité que la pièce renvoie « Pile » ?

.....

● Calcul 54.4



Une urne contient des boules de couleur bleue, rouge ou noire. On note n le nombre de boules bleues. On suppose qu'il y a deux fois plus de boules rouges que de boules bleues et qu'il y a 10 boules noires de plus que de boules bleues. On tire au hasard une boule de l'urne. On note A l'événement : « La boule tirée est rouge ou noire ».

a) Le nombre de boules dans l'urne vaut :

(a) $n + 12$

(b) $14n$

(c) $4n + 10$

(d) $\frac{5n}{2} - 10$

.....

b) Combien vaut la probabilité de l'événement A ?

● **Calcul 54.5**



On dispose d'un dé à quatre faces, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note p_i la probabilité d'obtenir la face portant le nombre i . On suppose que les propriétés suivantes sont satisfaites :

$$p_2 = 2p_1, \quad p_3 = 3p_1 \quad \text{et} \quad p_4 = 4p_1.$$

a) Déterminer p_1

b) Le dé est lancé une fois.

Combien vaut la probabilité d'obtenir une face avec un nombre pair ?

.....

● **Calcul 54.6**



Un dé équilibré à 6 faces est lancé deux fois de suite. On somme les valeurs obtenues lors de ces deux lancers. Combien vaut la probabilité d'obtenir la valeur 2 ?

(a) 0

(b) $\frac{1}{36}$

(c) $\frac{1}{6}$

(d) 1

.....

● **Calcul 54.7 — Des sangliers et des chevreuils.**



Une forêt contient x sangliers et y chevreuils. On sait que le nombre total de sangliers et de chevreuils est égal à 112 individus. On prélève des animaux au hasard, en les relâchant ensuite, et on évalue la probabilité d'obtenir un chevreuil à $\frac{1}{14}$.

a) En prélevant au hasard un de ces animaux, quelle est la probabilité d'obtenir un sanglier ?

.....

b) Déterminer le nombre y de chevreuils.

c) On prélève 10 animaux successivement, en les relâchant à chaque fois.

Combien vaut la probabilité de n'avoir obtenu aucun chevreuil ?

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\left(\frac{13}{14}\right)^{10}$

(c) $1 - \left(\frac{13}{14}\right)^{10}$

(d) $\left(\frac{1}{14}\right)^{10}$

(e) $\frac{65}{7}$

.....

Réponses mélangées

$\frac{1}{10}$

$\frac{13}{14}$

(c)

$\frac{3n+10}{4n+10}$

$\frac{1}{6}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{11}{36}$

$\frac{1}{36}$

$\frac{2}{3}$

(c)

(b)

(b)

$\frac{3}{5}$

8

► Réponses et corrigés page 267

Probabilités d'intersections et de réunions



Calculer des probabilités d'intersections et de réunions

● Calcul 55.1 — Pour commencer.



On se place dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; on y considère les trois parties :

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{3, 4, 5, 7\} \quad \text{et} \quad C = \{2, 4, 7\}.$$

Calculer les parties suivantes, en donnant leurs éléments (*par exemple, $\{1, 4, 7\}$ ou $\{2, 5, 6\}$, etc.*).

a) $A \cup B$

d) $\overline{A} \cup C$

b) $A \cap B$

e) $\overline{B} \cap \overline{C}$

c) $B \cap C$

f) $A \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$

● Calcul 55.2 — Quelques descriptions d'événements.



On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est composé de 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As en Trèfle, Pique, Carreau et Cœur. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :

C : « La carte tirée est un cœur » ; T : « La carte tirée est un trèfle » ;

D : « La carte tirée est une dame ».

Décrire les événements suivants à l'aide d'une phrase.

a) $C \cap D$

b) $C \cup T$

c) $\overline{T} \cap \overline{C}$

Écrire les événements suivants à l'aide des événements C , T et D .

d) « La carte tirée est une dame différente de la dame de cœur »

e) « La carte tirée est un pique ou un carreau »

f) « La carte tirée est la dame de cœur ou la dame de trèfle »

● **Calcul 55.3 — Formule d'inclusion-exclusion (I).**



On considère deux événements A et B . On rappelle que :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Dans chacun des cas suivants, à l'aide des informations données, calculer $P(A \cup B)$.

a) $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,7$ et $P(A \cap B) = 0,2$

b) $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

● **Calcul 55.4 — Formule d'inclusion-exclusion (II).**



On considère deux événements A et B . De nouveau, on rappelle que :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

a) On suppose que $P(A) = 0,625$, que $P(B) = 0,483$ et que $P(A \cup B) = 0,874$.

Calculer $P(A \cap B)$

b) On suppose que $P(\bar{A}) = 0,357$, que $P(B) = 0,425$ et que $P(A \cup B) = 0,763$.

Calculer $P(A \cap B)$

c) On suppose que $P(\bar{A}) = \frac{5}{12}$, que $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ et que $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$.

Calculer $P(B)$

d) On considère $p \in [0, 1]$ et on suppose que $P(A) = \frac{1-p}{6}$, que $P(\bar{B}) = \frac{2p+1}{3}$ et que $P(A \cup B) = \frac{3-3p}{4}$.

Calculer $P(A \cap B)$

● **Calcul 55.5 — Probabilité d'être en panne.**



Deux serveurs informatiques, S_1 et S_2 , sont connectés à un réseau.

On considère les événements A : « Le serveur S_1 est en panne » et B : « Le serveur S_2 est en panne ».

Une analyse de données a permis d'estimer les probabilités suivantes :

$$P(A) = 0,05, \quad P(B) = 0,08 \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = 0,01.$$

Calculer la probabilité des événements suivants.

a) C : « Le serveur S_1 fonctionne correctement »

b) D : « Au moins un serveur est en panne »

c) E : « Au moins un serveur fonctionne correctement »

● **Calcul 55.6 — Au restaurant.**



Un restaurant a servi 200 clients. Parmi eux, 120 clients ont commandé une entrée et un plat, tandis que 130 ont choisi un plat et un dessert. De plus, 90 clients ont pris entrée, plat et dessert. Tous les clients ont pris au moins un plat, sans entrée ni dessert pour certains.

On choisit au hasard un client ayant mangé dans ce restaurant. On définit les événements :

- A : « Le client a commandé une entrée » ;
- B : « Le client a commandé un dessert ».

Calculer la probabilité des événements suivants, sous forme d’une fraction irréductible.

- a) A
- b) B
- c) $A \cap B$
- d) « Le client a commandé une entrée ou un dessert »
- e) « Le client a commandé uniquement un plat »

● **Calcul 55.7 — Activités extra-scolaires.**



Le tableau ci-dessous présente les activités extra-scolaires des élèves d’une école.

	Théâtre	Musique	Sport	Total
Filles	30	40	30	100
Garçons	20	30	25	75
Total	50	70	55	175

On choisit au hasard un élève de cette école.

Calculer la probabilité des événements suivants, sous forme d’une fraction irréductible.

- a) A : « L’élève est un garçon pratiquant la musique »
- b) F : « L’élève est une fille »
- c) T : « L’élève fait du théâtre »
- d) « L’élève est une fille ou fait du théâtre »

● **Calcul 55.8 — Pour terminer !**



Un restaurant scolaire, fréquenté par N élèves, propose au choix pour le dessert : un yaourt, un fruit ou une pâtisserie. Les élèves peuvent choisir au maximum deux desserts (forcément différents) parmi les trois et on suppose que chaque élève choisit au moins un dessert.

On sait que a élèves ont pris un yaourt, b élèves ont pris un fruit et c élèves ont pris une pâtisserie. De plus, on sait qu'exactement d élèves ont pris à la fois un yaourt et un fruit. Enfin, on sait qu'aucun élève n'a pris un fruit seul.

On choisit un élève au hasard et on définit les événements :

A : « Il a choisi un yaourt », B : « Il a choisi un fruit » et C : « Il a choisi une pâtisserie ».

a) A-t-on $N = a + b + c$?

Exprimer en fonction de N , a , b , c et d la probabilité des événements suivants.

b) « L'élève a choisi un yaourt ou un fruit »

c) D : « L'élève a choisi seulement une pâtisserie »

d) « L'élève a choisi un fruit et une pâtisserie »

e) « L'élève a choisi un yaourt et une pâtisserie »

f) E : « L'élève a choisi seulement un yaourt »

g) F : « L'élève a choisi un seul dessert »

Réponses mélangées

$\frac{13}{20}$	$\frac{a+c-N}{N}$	$(D \cap C) \cup (D \cap T)$	$\frac{2}{7}$	0,9	$D \cap \overline{C}$	0,95	$\frac{3}{8}$
$\{2, 4, 5, 6, 7\}$	$\{4, 7\}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1-p}{12}$	non	$\frac{4}{7}$	$\frac{N-a-b+d}{N}$	$\frac{9}{20}$
$\frac{N-c-d}{N}$	$\frac{2N-a-b-c}{N}$	$\frac{11}{12}$	0,12	$\frac{24}{35}$	$\frac{a+b-d}{N}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{35}$
$\overline{C} \cap \overline{T}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$	$\{3\}$	« La carte tirée est la dame de cœur »	$\frac{b-d}{N}$	« La carte tirée est un cœur ou un trèfle »		
$\{1, 2, 3, 6\}$	0,234	0,99	$\frac{3}{5}$	$\{1, 6\}$	0,305	« La carte tirée n'est ni un trèfle, ni un cœur »	

► Réponses et corrigés page 269

Probabilités conditionnelles



Se familiariser avec les probabilités conditionnelles

● Calcul 56.1 — Lecture d'un arbre.



On considère des événements A et B , vérifiant les conditions de l'arbre de probabilité ci-dessous.

Calculer les probabilités suivantes.

a) $P(A)$

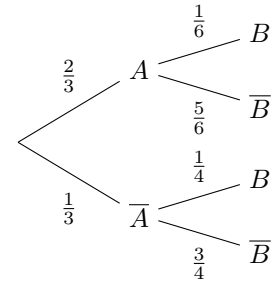
d) $P_{\bar{A}}(B)$

b) $P(\bar{A})$

e) $P(A \cap B)$

c) $P_A(B)$

f) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$...



● Calcul 56.2 — Des cases à compléter.



Compléter chacun des tableaux suivants.

a)

$P(A)$	$P_A(B)$	$P(A \cap B)$
$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{5}$
.....	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{9}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	

b)

$P(A)$	$P_A(B)$	$P(A \cap B)$
$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{9}$
$\frac{7}{13}$	$\frac{3}{28}$	
.....	1	$\frac{2}{3}$

● Calcul 56.3



On rappelle que, par définition, on a $P_A(B)P(A) = P(A \cap B)$. On peut en déduire, en particulier :

$$P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B).$$

Dans chacun des cas suivants, calculer $P_B(A)$:

a) si $P(A) = \frac{3}{8}$, $P_A(B) = \frac{4}{7}$ et $P(B) = \frac{2}{5}$

b) si $P(A) = \frac{4}{9}$, $P_A(B) = \frac{4}{5}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$

c) si $P(A) = \frac{5}{9}$, $P_A(B) = \frac{28}{37}$ et $P(B) = \frac{7}{9}$

● Calcul 56.4



Dans chacun des cas suivants, calculer $P_B(A)$:

a) si $P(\bar{A}) = \frac{7}{8}$, $P_A(B) = \frac{7}{12}$ et $P(\bar{B}) = \frac{2}{9}$

b) si $P(A) = \frac{3}{8}$, $P_A(\bar{B}) = \frac{1}{7}$ et $P(\bar{B}) = 0$

● Calcul 56.5 — Pour celles et ceux qui aiment les pâtes !



Coralie prépare des pâtes au pesto : elle choisit entre des spaghettis (S) ou des fusillis (F), et entre du pesto vert (V) ou du pesto rouge (R).

La probabilité que Coralie choisisse les fusillis est de 0,2. Lorsqu'elle choisit les spaghettis, elle mange du pesto rouge avec une probabilité de 0,3. Avec les fusillis, elle mange du pesto rouge avec probabilité 0,8.

On donne la formule des probabilités totales : $P(V) = P(S \cap V) + P(F \cap V)$.

a) Compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b) Quelle est la probabilité que Coralie mange des spaghettis au pesto vert ?

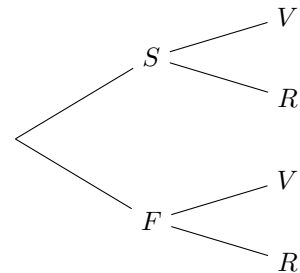
.....

c) Quelle est la probabilité qu'elle mange du pesto vert ?

.....

d) Sachant qu'elle a mangé du pesto vert, quelle est la probabilité qu'elle ait mangé des fusillis ?

.....



● Calcul 56.6



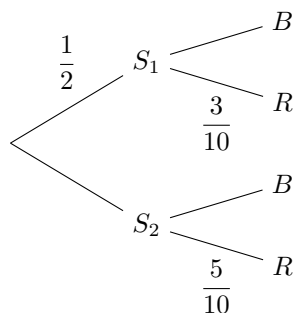
On considère deux sacs S_1 et S_2 contenant chacun 10 boules, rouges ou blanches.

On ne connaît pas, *a priori*, la répartition exacte entre boules rouges et boules blanches dans chaque sac : le nombre de boules rouges (et donc de blanches) peut prendre toutes les valeurs possibles entre 0 et 10.

On note S_1 l'événement « on choisit le sac S_1 », de même pour S_2 . On note R l'événement « on tire une boule rouge », et B l'événement « on tire une boule blanche ».

La situation est représentée par l'arbre de probabilité ci-dessous.

On donne la formule des probabilités totales : $P(R) = P(S_1 \cap R) + P(S_2 \cap R)$.



On choisit au hasard un sac puis on tire une boule dans ce sac.

Calculer les probabilités suivantes.

a) $P_{S_1}(R)$ b) $P_{S_2}(R)$

En déduire les probabilités suivantes.

c) $P(R)$ d) $P_R(S_1)$

● **Calcul 56.7 — Allez le foot !**



Lors d'un match de football, une séance de tirs au but est organisée. On sait qu'Élie ne tire jamais au centre et qu'il tire à gauche en moyenne 3 fois sur 10. De plus, Élie sait que le gardien de l'équipe adverse arrête le tir avec une probabilité de 0,2 si le tireur vise à gauche et avec une probabilité 0,4 s'il vise à droite.

a) Quelle est la probabilité que le gardien n'arrête pas le tir, sachant qu'Élie vise à droite ?

b) Quelle est la probabilité qu'Élie vise à gauche et que le gardien arrête le tir ?

c) Quelle est la probabilité qu'il y ait but ?

● **Calcul 56.8 — Le CDI.**



Le CDI du lycée contient N livres en français et M livres en anglais. Arthur a déjà lu n livres de la bibliothèque dont m en anglais. Il choisit un livre au hasard dans le CDI.

a) Quelle est la probabilité qu'il ne l'ait pas lu ?

b) Quelle est la probabilité qu'il l'ait lu, sachant qu'il est en français ?

Cas concret : on suppose maintenant que $N = 808$, $M = 129$, $n = 236$ et $m = 28$.

Remarque

Pour la suite de l'exercice, on ne cherchera pas à simplifier les fractions : on se contentera de réponses de la forme « $\frac{22}{44}$ » ou encore « $\frac{700}{814}$ ».

Ben, un autre élève du lycée, a lu 37 livres en français dont 17 qu'Arthur a déjà lus et 87 livres en anglais dont 13 qu'Arthur a déjà lus.

c) Compléter le tableau ci-dessous.

Élève	Nombre de livres en français lus	Nombre de livres en anglais lus	Total
Arthur			
Ben			

d) Ben choisit un livre au hasard. Quelle est la probabilité qu'il l'ait déjà lu ?

e) Quelle est la probabilité qu'il soit en anglais, sachant qu'il l'a déjà lu ?

f) Quelle est la probabilité qu'il soit en français, sachant qu'Arthur et Ben l'ont déjà lu ?

● Calcul 56.9 — Groupes sanguins.



Remarque

Dans cet exercice, on ne cherchera pas à simplifier les fractions : on se contentera de réponses de la forme « $\frac{260+20+1}{260+200+1+1}$ ».

Il y a quatre groupes sanguins, nommés A, B, O ou AB, chacun pouvant être rhésus positif (R+) ou négatif (R-). On interroge les 508 élèves d'un lycée et on répertorie leurs réponses dans le tableau ci-dessous. Emma, une élève, s'interroge sur son groupe sanguin.

Groupe	A	B	O	AB
Rhésus +	260	9	200	1
Rhésus -	16	1	20	1

a) Quelle est la probabilité qu'elle soit R+, sachant qu'elle est du groupe A ?

b) Quelle est la probabilité qu'elle soit du groupe A, sachant qu'elle est R- ?

c) Quelle est la probabilité qu'elle soit R+, sachant qu'elle n'est pas du groupe B ? .

● Calcul 56.10 — Un arbre renversé.



On considère deux événements C et D tels que $P(C) = 0,2$, $P_C(D) = 0,9$ et $P_{\bar{C}}(\bar{D}) = 0,9$.

On donne la formule des probabilités totales : $P(D) = P(C \cap D) + P(\bar{C} \cap D)$.

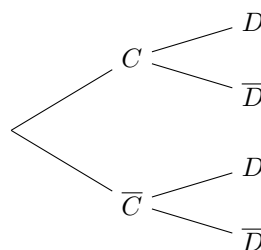
a) Compléter l'arbre A.

b) Calculer $P(D)$

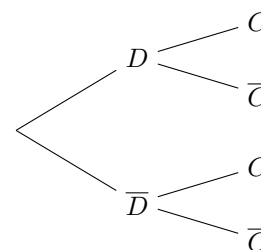
c) Calculer $P_D(C)$

d) Calculer $P_{\bar{D}}(C)$

e) Compléter l'arbre B.



Arbre A



Arbre B

Réponses mélangées

$\frac{16}{16+1+20+1}$	$\frac{20}{37}$	0,26	$\frac{9}{13}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{260+200+1}{260+16+200+20+1+1}$	$\frac{260}{260+16}$
$\frac{n-m}{N}$	$\frac{N+M-n}{N+M}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{124}{937}$
$\frac{33}{50}$	$\frac{1}{6}$	0,56	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	0,6
						0,6	$\frac{87}{124}$
							$\frac{3}{50}$
							$\frac{3}{8}$

► Réponses et corrigés page 272

Diviseurs et multiples



S'entraîner à travailler avec les notions de diviseur et de multiple

● Calcul 57.1



Pour chacun des entiers a et b ci-dessous, poser la division euclidienne de a par b puis écrire le résultat sous la forme $a = b \times q + r$, où r est le reste et q le quotient.

Par exemple, la division euclidienne de 4 242 par 16, posée ci-contre, s'écrit :

$$\begin{array}{r} 4\ 2\ 4\ 2 \\ 1\ 0\ 4 \\ 8\ 2 \\ 2 \end{array} \left| \begin{array}{r} 1\ 6 \\ 2\ 6\ 5 \end{array} \right.$$

$$4\ 242 = 16 \times 265 + 2.$$

a) $a = 457$ et $b = 3$

d) $a = 6\ 735$ et $b = 15$

b) $a = 873$ et $b = 6$

e) $a = 38\ 647$ et $b = 11$..

c) $a = 8\ 394$ et $b = 12$

f) $a = 57\ 383$ et $b = 31$..

● Calcul 57.2



Déterminer si les entiers de la première colonne du tableau sont divisibles par 2, 3, 5, 9 ou 10.

On indiquera s'il y a divisibilité par le symbole « ✓ » et on laissera la case vide sinon.

Nombre	2	3	5	9	10
252					
845					
9 945					
12 345					
21 879					

Nombre	2	3	5	9	10
1 054					
15 606					
110 751					
142 290					
191 479					

● Calcul 57.3



Pour chacun des entiers ci-dessous, écrire la liste complète de ses diviseurs positifs.

a) 100

b) 99

c) 125

d) 760

● **Calcul 57.4 — Plus grand diviseur commun.**



Dans chacun des cas suivants, donner le plus grand diviseur commun des deux entiers proposés.

- | | | | |
|---------------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| a) 45 et 72 | <input type="text"/> | c) 135 et 270 | <input type="text"/> |
| b) 154 et 242 | <input type="text"/> | d) 90 et 135 | <input type="text"/> |

● **Calcul 57.5 — Recherche de contre-exemples.**



On considère a , b et c des entiers.

Les énoncés ci-dessous sont faux. Pour chacun d'entre eux, donner un contre-exemple.

- | | |
|--|----------------------|
| a) Si a divise b , alors b divise a | <input type="text"/> |
| b) Si a divise $b + c$, alors a divise b et a divise c | <input type="text"/> |
| c) Si a divise b , alors $a + c$ divise $b + c$ | <input type="text"/> |
| d) Si a divise bc , alors a divise b ou a divise c | <input type="text"/> |
| e) Si a divise b et si c divise b , alors ac divise b | <input type="text"/> |

● **Calcul 57.6 — Calcul de parités.**



On suppose dans cet exercice que a est un entier pair et que b est un entier impair. Déterminer la parité des expressions suivantes en indiquant « pair » ou « impair ».

- | | | | | | |
|----------------|----------------------|------------------|----------------------|--------------------|----------------------|
| a) a^2 | <input type="text"/> | c) ab | <input type="text"/> | e) $a^2 + 3b$... | <input type="text"/> |
| b) b^2 | <input type="text"/> | d) $a + b$ | <input type="text"/> | f) $a^2 + 16b^2$. | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

impair	$a = c = 1$ et $b = 2$	$31 \times 1851 + 2$	9	$11 \times 3513 + 4$	$\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 19, 20, 38, 40, 76, 95, 152, 190, 380, 760\}$
$\{1, 5, 25, 125\}$	$6 \times 145 + 3$	$3 \times 152 + 1$	impair	135	$a = 1$ et $b = 2$
pair	pair	45	$\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$	$a = b = c = 2$	pair
$a = 2$ et $b = c = 1$	$12 \times 699 + 6$	$\{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$	$15 \times 449 + 0$	$a = 4$ et $b = c = 2$	impair
					22

► Réponses et corrigés page 275

Nombres premiers et applications



S'entraîner à travailler avec les nombres premiers

● Calcul 58.1 — Pour se rafraîchir la mémoire.



Rappeler les neuf premiers nombres premiers, dans l'ordre croissant.

- | | | | | | |
|----------|----------------------|----------|----------------------|----------|----------------------|
| a) | <input type="text"/> | d) | <input type="text"/> | g) | <input type="text"/> |
| b) | <input type="text"/> | e) | <input type="text"/> | h) | <input type="text"/> |
| c) | <input type="text"/> | f) | <input type="text"/> | i) | <input type="text"/> |

● Calcul 58.2



Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres suivants.

On attend le résultat sous la forme de puissances de nombres premiers. Par exemple, on a $12 = 2^2 \times 3$.

- | | | | | | |
|-------------|----------------------|-------------|----------------------|-------------|----------------------|
| a) 15 | <input type="text"/> | c) 20 | <input type="text"/> | e) 50 | <input type="text"/> |
| b) 21 | <input type="text"/> | d) 49 | <input type="text"/> | f) 24 | <input type="text"/> |

● Calcul 58.3



Même consigne que pour le calcul précédent.

- | | | | | | |
|--------------|----------------------|--------------|----------------------|-------------|----------------------|
| a) 150 | <input type="text"/> | c) 99 | <input type="text"/> | e) 80 | <input type="text"/> |
| b) 100 | <input type="text"/> | d) 360 | <input type="text"/> | f) 64 | <input type="text"/> |

● Calcul 58.4 — Pour rendre des fractions irréductibles.



Écrire chacune des fractions suivantes comme un quotient de produits de nombres premiers.

Par exemple, on écrira $\frac{12 \times 3}{66} = \frac{2^2 \times 3^2}{2 \times 3 \times 11}$; dans cet exercice, on ne demande pas de faire les éventuelles simplifications.

- | | | | |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\frac{21 \times 4}{6^2 \times 18}$ | <input type="text"/> | c) $\frac{16 \times 17^2}{22 \times 3 \times 9}$ | <input type="text"/> |
| b) $\frac{2 \times 25}{30 \times 20}$ | <input type="text"/> | d) $\frac{12 \times 25^2}{60 \times 44}$ | <input type="text"/> |

● **Calcul 58.5 — Fractions irréductibles (I).**



Écrire chacune des fractions ci-dessous sous forme irréductible.

On pourra s'inspirer du calcul précédent, écrire les fractions sous forme de quotients de produits de nombres premiers, les simplifier et obtenir des fractions irréductibles.

a) $\frac{10}{12} \cdot \boxed{}$ b) $\frac{18}{24} \cdot \boxed{}$ c) $\frac{26}{130} \cdot \boxed{}$ d) $\frac{100}{250} \cdot \boxed{}$

● **Calcul 58.6 — Fractions irréductibles (II).**



Même consigne que pour le calcul précédent.

a) $\frac{1800}{810} \dots\dots\dots \boxed{}$ c) $\frac{3 \times 9 \times 99}{33^2} \dots\dots\dots \boxed{}$
 b) $\frac{85}{17} \dots\dots\dots \boxed{}$ d) $\frac{14 \times 49 \times 2\sqrt{81}}{33^2 \times 42} \dots\dots\dots \boxed{}$

● **Calcul 58.7 — 97 est-il premier ?**



L'objectif de cet exercice est de déterminer si 97 est un nombre premier ou non.

- a) Trouver un entier positif n tel que $n^2 < 97 < (n+1)^2$. $\dots\dots\dots \boxed{}$
 b) En déduire un entier m tel que $m < \sqrt{97} < m+1$. $\dots\dots\dots \boxed{}$
 c) Déterminer l'ensemble des nombres premiers p tels que $1 < p < \sqrt{97}$. $\dots\dots\dots \boxed{}$

Les nombres suivants sont-ils des diviseurs de 97 ? Répondre par « oui » ou « non ».

- d) 2 $\dots\dots \boxed{}$ e) 3 $\dots\dots \boxed{}$ f) 5 $\dots\dots \boxed{}$ g) 7 $\dots\dots \boxed{}$

h) On admet la propriété suivante : un entier naturel $n \geq 2$ est premier s'il ne possède aucun diviseur premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

En utilisant cette propriété, dire si « oui » ou « non » 97 est un nombre premier. $\dots\dots\dots \boxed{}$

Réponses mélangées

$\frac{20}{9}$	$2 \times 3 \times 5^2$	$\frac{2^2 \times 3 \times 5^4}{2^4 \times 3 \times 5 \times 11}$	7	$3^2 \times 11$	5	$\frac{3}{4}$	19	23	$2^3 \times 3^2 \times 5$
$\frac{98}{363}$	$\frac{2 \times 5^2}{2^3 \times 3 \times 5^2}$	$\frac{2}{5}$	non	$2^2 \times 5^2$	$2^3 \times 3$	17	3×7	2	non
non	$2^2 \times 5$	oui	9	5	3×5	9	2×5^2	13	3
$\frac{2^2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3^4}$	$\{2, 3, 5, 7\}$	$\frac{2^4 \times 17^2}{2 \times 3^3 \times 11}$	2^6	$2^4 \times 5$	7^2	$\frac{5}{6}$	$\frac{27}{11}$	$\frac{1}{5}$	non
									11

► Réponses et corrigés page 277

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Calculs avec le signe « moins »

Réponses

1.1 a) -11	1.2 c) 54	1.4 c) 10	1.7 a) $2x$
1.1 b) -14	1.2 d) -20	1.4 d) -4	1.7 b) $3y$
1.1 c) 3,5	1.2 e) 7,7	1.4 e) 2	1.7 c) $-15z$
1.1 d) 8,5	1.2 f) -7,4	1.4 f) 6	1.7 d) $18t$
1.1 e) 4,3	1.3 a) -6	1.5 a) 6	1.8 a) $2x$
1.1 f) -2,1	1.3 b) 4	1.5 b) 9,3	1.8 b) $-7y$
1.1 g) 26	1.3 c) -1,5	1.5 c) -2,4	1.8 c) $-7z$
1.1 h) 22,3	1.3 d) -4,5	1.5 d) -74	1.8 d) $2t$
1.1 i) -118,2	1.3 e) 4	1.6 a) 0	1.9 a) $2x$
1.2 a) -32	1.3 f) -13	1.6 b) -13	1.9 b) $-6y$
1.2 b) -35	1.4 a) -12	1.6 c) -58	1.9 c) $3z$
	1.4 b) -4	1.6 d) -5	1.9 d) $-t$

Corrigés

1.4 a) On a $\frac{48}{-4} = -12$.

1.4 b) On a $\frac{-24}{14 + (-8)} = \frac{-24}{6} = -4$.

1.4 c) On a $\frac{-12,5 \times 4}{(-12,5) + 7,5} = \frac{-50}{-5} = 10$.

1.4 d) On a $\frac{53 + (-17)}{18 \div (-2)} = \frac{36}{-9} = -4$.

1.4 e) On a $\frac{(-56) \div 4}{35 \div (-5)} = \frac{-14}{-7} = 2$.

1.4 f) On a $-\frac{(-4) \times (-12)}{(-72) \div 9} = -\frac{48}{-8} = 6$.

1.5 a) On a $(-2) + 3 - (-5) = 1 + 5 = 6$.

1.5 b) On a $7,3 + (-15) - (-17) = -7,7 + 17 = 9,3$.

1.5 c) On a $(-23) - (-17) + 3,6 = -23 + 17 + 3,6 = -6 + 3,6 = -2,4$.

1.5 d) On a $-47 - (-38) - 65 = -47 + 38 - 65 = -9 - 65 = -74$.

1.6 a) On a $(3 - 5) - (4 - 6) = (-2) - (-2) = -2 + 2 = 0$.

1.6 b) On a $(23 - 15) + (17 - 38) = 8 + (-21) = -13$.

1.6 c) On a $-27 + (-12) - (34 + (-15)) = -39 - 19 = -58$.

1.6 d) On a :

$$-((-43) - (-24)) - ((-15) - (-39)) = -(-43 + 24) - (-15 + 39) = -(-19) - 24 = 19 - 24 = -5.$$

1.7 a) On a $(-x) + 3x = (-1 + 3)x = 2x$.

1.7 b) On a $12y + (-9y) = (12 + (-9))y = 3y$.

1.7 c) On a $(-32z) + 17z = (-32 + 17)z = -15z$.

1.7 d) On a $-29t - (-47t) = (29 - (-47))t = (-29 + 47)t = 18t$.

1.8 a) On a $-\frac{12}{4}x + \frac{15}{3}x = -3x + 5x = 2x$.

1.8 b) On a $-\frac{24}{6}y + \left(-\frac{27}{9}y\right) = -4y - 3y = -7y$.

1.8 c) On a $\left(-\frac{36}{4}z\right) + \frac{18}{9}z = -9z + 2z = -7z$.

1.8 d) On a $\left(-\frac{48}{8}t\right) - \left(-\frac{72}{9}t\right) = -6t + 8t = 2t$.

1.9 a) On a $\frac{(-3x) + (-5x)}{(-36) \div 9} = \frac{-8x}{-4} = 2x$.

1.9 b) On a $\frac{(-14y) - 28y}{(-49) \div (-7)} = \frac{-42y}{7} = -6y$.

1.9 c) On a $\frac{(-144z) \div 12}{24 \div (-6)} = \frac{-12z}{-4} = 3z$.

1.9 d) On a $\frac{(-3) \times (-4t) + (-4t)}{((-28) \div 7) + (48 \div (-12))} = \frac{12t - 4t}{(-4) + (-4)} = \frac{8t}{-8} = -t$.

Fiche n° 2. Priorités dans les opérations

Réponses

2.1 a) $\boxed{8}$	2.2 e) $\boxed{-17}$	2.4 a) $\boxed{2}$	2.5 d) $\boxed{-\frac{31}{7}}$
2.1 b) $\boxed{12}$	2.2 f) $\boxed{17}$	2.4 b) $\boxed{15}$	2.6 a) $\boxed{-6x - 8}$
2.1 c) $\boxed{-20}$	2.3 a) $\boxed{59}$	2.4 c) $\boxed{10}$	2.6 b) $\boxed{9x + 6}$
2.1 d) $\boxed{-3}$	2.3 b) $\boxed{-26}$	2.4 d) $\boxed{-58}$	2.7 a) $\boxed{100}$
2.1 e) $\boxed{-51}$	2.3 c) $\boxed{85}$	2.5 a) $\boxed{\frac{14}{15}}$	2.7 b) $\boxed{96}$
2.1 f) $\boxed{3}$	2.3 d) $\boxed{-21}$	2.5 b) $\boxed{\frac{59}{6}}$	2.7 c) $\boxed{-3}$
2.2 a) $\boxed{4}$	2.3 e) $\boxed{-6}$	2.5 c) $\boxed{\frac{1}{8}}$	2.7 d) $\boxed{\frac{1}{3}}$
2.2 b) $\boxed{-6}$	2.3 f) $\boxed{6}$		
2.2 c) $\boxed{7}$	2.3 g) $\boxed{-7}$		
2.2 d) $\boxed{23}$	2.3 h) $\boxed{11}$		

Corrigés

2.1 b) On a $-2 - (-5 - 9) = -2 - (-14) = -2 + 14 = 12$.

2.1 c) On a $-3 - (10 - (-7)) = -3 - 17 = -20$.

2.1 d) On a $(-2 + 3) - ((-5) - (-9)) = 1 - (-5 + 9) = 1 - 4 = -3$.

2.1 e) On a $-(5 - (-8)) - (-(-2) + (-9) \times (-4)) = -13 - (2 + 36) = -13 - 38 = -51$.

2.1 f) On a :

$$\begin{aligned} -2 - (-3 - (-4 - (-5 - (-6 - (-7)))))) &= -2 - (-3 - (-4 - (-5 - 1))) \\ &= -2 - (-3 - (-4 - (-6))) \\ &= -2 - (-3 - 2) = 3. \end{aligned}$$

2.2 a) On a $3 - (4 - 5) = 3 - (-1) = 4$.

2.2 b) On a $(3 - 4) - 5 = -1 - 5 = -6$.

2.2 c) On a $3 \times 4 - 5 = 12 - 5 = 7$.

2.2 d) On a $3 - 4 \times (-5) = 3 + 20 = 23$.

2.2 e) On a $-(-3) \times (-4) - 5 = -12 - 5 = -17$.

2.2 f) On a $-3 - 4 \times (-5) = -3 + 20 = 17$.

2.3 a) On a $2 + 3 \times 5 + 7 \times 6 = 2 + 15 + 42 = 59$.

2.3 b) On a $-2 - (-6)(-4) = -2 - 24 = -26$.

2.3 c) On a $5 - 5 \times (2 \times (-1 + 3) \times (-4)) = 5 - 5 \times (2 \times 2 \times (-4)) = 5 - 5 \times (-16) = 85$.

2.3 d) On a $-7 + (-13 + 6) \times (-3 + 5) = -7 - 7 \times 2 = -21$.

2.3 e) On a $15 - 3(-5 - 9) \div (-2) = 15 - 3 \times (-14) \div (-2) = 15 - 3 \times 7 = -6$.

2.3 f) On a $-2 - (7 - 3) \times (2 - 4) = -2 - 4 \times (-2) = -2 + 8 = 6$.

2.3 g) On a $-2 - (6 - (-3)) - (-2 \div (2 \div 4)) = -2 - 9 - (-2) \times 2 = -11 - 4 = -7$.

2.3 h) On a $-(-2) \div (-(-10) \div (-5)) + 3 - 3 \div (3 \div (-9)) = 2 \div (-2) + 3 - 3 \times (-3) = -1 + 3 + 9 = 11$.

2.4 a) On a $-2 + 4^2 - 3 \times (-2)^2 = -2 + 16 - 3 \times 4 = 14 - 12 = 2$.

2.4 b) On a $9 - (6 - 3(-2)^2) = 9 - (6 - 12) = 9 + 6 = 15$.

2.4 c) On a $5^2 \div (-7 - (-2)) - 3(-5) = 25 \div (-5) + 15 = -5 + 15 = 10$.

2.4 d) On a $1 - (-2)^4 + (-3)^3 - (-4)^2 = 1 - 16 - 27 - 16 = -58$.

2.5 a) On a $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{3} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15} + \frac{4}{15} = \frac{14}{15}$.

2.5 b) On a $-\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \div \frac{1}{12} = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times 12 = -\frac{1}{6} + 10 = \frac{-1 + 60}{6} = \frac{59}{6}$.

2.5 c) On a $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2+1}{4} \times \frac{2-1}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

2.5 d) On a $-\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \div \left(-\frac{3}{14} + \frac{1}{7}\right) = -\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \div \frac{-1}{14} = -\frac{3}{7} + \frac{2}{7} \times (-14) = -\frac{3}{7} - \frac{28}{7} = -\frac{31}{7}$.

2.6 a) On a $-(5 + 3x) - 6x + (1 - x) \times (-3) = -5 - 3x - 6x - 3 + 3x = -8 - 6x$.

2.6 b) On a $-(3x - 5) - (-2) \times (2 + 3x) - 3(1 - 2x) = -3x + 5 + 4 + 6x - 3 + 6x = 6 + 9x$.

2.7 a) On a $(-2 \times (-4))^2 + (-2 + (-4))^2 = 8^2 + (-6)^2 = 64 + 36 = 100$.

2.7 b) On a $(-2 + 2(-4))^2 - (-2^3 + 6)^2 = (-10)^2 - (-2)^2 = 100 - 4 = 96$.

2.7 c) On a $-(3 \times (-3))^2 \div ((-1 - 2)^2 \div (1 \div 3)) = -81 \div (9 \times 3) = -81 \div 27 = -3$.

2.7 d) On a $(-(-3) \div (-3)^2)^2 \times ((-1 - 2)^2 \times (1 \div 3)) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 9 \div 3 = \frac{1}{3}$.

Fiche n° 3. Sommes et différences de fractions

Réponses

3.1 a) $\frac{7}{3}$	3.2 b) $\frac{10}{3}$	3.3 c) $\frac{1}{3}$	3.5 a) $\frac{11}{12}$	3.5 e) $\frac{23}{12}$
3.1 b) $\frac{36}{5}$	3.2 c) $\frac{2}{3}$	3.4 a) $\frac{13}{6}$	3.5 b) $\frac{2}{3}$	3.5 f) $-\frac{4}{9}$
3.1 c) $\frac{32}{9}$	3.3 a) $\frac{3}{7}$	3.4 b) $\frac{65}{12}$	3.5 c) $\frac{1}{3}$	3.6 a) .. $\frac{7}{12}x - \frac{1}{6}$
3.2 a) $\frac{24}{7}$	3.3 b) 7	3.4 c) $\frac{251}{1000}$	3.5 d) $\frac{8}{9}$	3.6 b) .. $\frac{7}{12}x - \frac{1}{4}$

Corrigés

3.1 a) On a $2 + \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

3.2 a) On a $5 - \frac{11}{7} = \frac{35 - 11}{7} = \frac{24}{7}$.

3.2 c) On a $3 + \frac{-14}{6} = 3 - \frac{7}{3} = \frac{9}{3} - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}$.

3.3 a) On a $\frac{15}{14} - \frac{9}{14} = \frac{15 - 9}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$.

3.3 b) On a $\frac{5}{6} + \frac{16}{6} + \frac{21}{6} = \frac{5 + 16 + 21}{6} = \frac{42}{6} = 7$.

3.4 a) On a $\frac{7}{4} + \frac{5}{12} = \frac{7 \times 3}{4 \times 3} + \frac{5}{12} = \frac{21}{12} + \frac{5}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}$.

3.4 b) On a $\frac{62}{12} + \frac{12}{48} = \frac{62}{12} + \frac{3}{12} = \frac{65}{12}$.

3.4 c) On a $\frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{1}{10^3} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{200}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{251}{1000}$.

3.5 a) On a $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$.

3.5 b) On a $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

3.5 e) On a $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{6}{12} + \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{23}{12}$.

3.5 f) On a $\frac{5}{9} + \frac{-15}{24} - \frac{24}{64} = \frac{5}{9} - \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{9} - \frac{8}{8} = \frac{5}{9} - \frac{9}{9} = -\frac{4}{9}$.

3.6 a) On a $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{x+1}{3} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}x - \frac{1}{6}$.

3.6 b) On a $\frac{2x+3}{6} + \frac{x-3}{4} = \frac{2}{6}x + \frac{3}{6} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} = \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{4}\right)x + \frac{3}{6} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}x - \frac{1}{4}$.

Fiche n° 4. Réécriture de fractions

Réponses

4.1 a)	$\frac{70}{100}$	4.2 b)	$-\frac{5}{3}$	4.2 f)	$\frac{2}{3}$	4.5 b)	$\frac{5}{2}$
4.1 b)	$\frac{75}{100}$	4.2 c)	$-\frac{3}{2}$	4.3	$\textcircled{d}$	4.5 c)	$\frac{1}{4}$
4.1 c)	$\frac{65}{100}$	4.2 d)	$\frac{1}{40}$	4.4	$\textcircled{b}$	4.5 d)	$\frac{4}{5}$
4.2 a)	$\frac{2}{3}$	4.2 e)	$\frac{4}{15}$	4.5 a)	$\frac{6}{5}$		

Corrigés

4.1 a) On a $\frac{7}{10} = \frac{7 \times 10}{10 \times 10} = \frac{70}{100}$.

4.1 b) On a $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100}$.

4.2 a) On a $\frac{12}{18} = \frac{6 \times 2}{6 \times 3} = \frac{2}{3}$.

4.2 b) On a $-\frac{35}{21} = -\frac{7 \times 5}{7 \times 3} = -\frac{5}{3}$.

4.2 c) On a $\frac{42}{-28} = -\frac{14 \times 3}{14 \times 2} = -\frac{3}{2}$.

4.2 d) On a $\frac{18}{720} = \frac{18}{72 \times 10} = \frac{18 \times 1}{18 \times 4 \times 10} = \frac{1}{40}$.

4.2 e) On a $\frac{5 \times 24}{18 \times 25} = \frac{5 \times 6 \times 4}{6 \times 3 \times 5 \times 5} = \frac{4}{15}$.

4.2 f) On a $\frac{11 \times 14}{7 \times 33} = \frac{11 \times 2 \times 7}{7 \times 3 \times 11} = \frac{2}{3}$.

4.3 On a $\frac{5}{20} = \frac{5 \times 1}{5 \times 4} = \frac{1}{4}$.

4.4 On a $\frac{20}{45} = \frac{5 \times 4}{5 \times 9} = \frac{4}{9}$, puis, $\frac{-16}{-36} = \frac{-4 \times 4}{-4 \times 9} = \frac{4}{9}$ et $\frac{32}{72} = \frac{8 \times 4}{8 \times 9} = \frac{4}{9}$ alors que $\frac{12}{18} = \frac{2 \times 6}{2 \times 9} = \frac{6}{9} \neq \frac{4}{9}$.

4.5 a) On a $1,2 = \frac{12}{10} = \frac{2 \times 6}{2 \times 5} = \frac{6}{5}$.

4.5 b) On a $2,5 = \frac{25}{10} = \frac{5 \times 5}{5 \times 2} = \frac{5}{2}$.

4.5 c) On a $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{25 \times 1}{25 \times 4} = \frac{1}{4}$.

4.5 d) On a $0,8 = \frac{8}{10} = \frac{2 \times 4}{2 \times 5} = \frac{4}{5}$.

Fiche n° 5. Produits et sommes de fractions

Réponses

5.1 a).....	$\frac{1}{4}$	5.2 c).....	$\frac{5}{2}$	5.5 b).....	$-\frac{44}{105}$	5.6 a).....	$\frac{127}{42}$
5.1 b).....	$-\frac{1}{5}$	5.2 d).....	-1	5.5 c).....	$\frac{1}{1}$	5.6 b).....	$-\frac{5}{12}$
5.1 c).....	$\frac{3}{4}$	5.3 a).....	(a) et (c)	5.5 d).....	$\frac{17}{2}$	5.6 c).....	0
5.1 d).....	$\frac{3}{50}$	5.3 b).....	(e)	5.5 e).....	$-\frac{39}{14}$	5.6 d).....	$-\frac{169}{84}$
5.1 e).....	$-\frac{12}{5}$	5.4 a).....	$\frac{5}{6}$	5.5 f).....	$-\frac{11}{4}$	5.7 a).....	$-\frac{5}{24}$
5.1 f).....	$\frac{251}{25}$	5.4 b).....	$\frac{10}{99}$	5.5 g).....	$\frac{1}{6}$	5.7 b).....	$\frac{71}{60}$
5.2 a).....	$\frac{7}{6}$	5.4 c).....	$-\frac{25}{1568}$	5.5 h).....	$-\frac{1}{29}$	5.8 a).....	2
5.2 b).....	$-\frac{1}{7}$	5.4 d).....	$\frac{1}{64}$	5.5 i).....	$\frac{1}{3}$	5.8 b).....	$\frac{34}{7}$
		5.5 a).....	$-\frac{29}{15}$			5.8 c).....	$\frac{135}{88}$

Corrigés

5.1 a) On a $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

5.1 b) On a $-0,2 = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$.

5.1 c) On a $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

5.1 d) On a $0,060 = 0,06 = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$.

5.1 e) On a $-2,4 = -\frac{24}{10} = -\frac{12}{5}$.

5.1 f) On a $10,04 = \frac{1004}{100} = \frac{251 \times 4}{25 \times 4} = \frac{251}{25}$.

5.2 a) On a $\frac{42}{36} = \frac{7 \times 6}{6 \times 6} = \frac{7}{6}$.

5.2 b) On a $\frac{4-7}{3 \times 7} = \frac{-3}{3 \times 7} = -\frac{1}{7}$.

5.2 c) On a $\frac{2100}{840} = \frac{210}{84} = \frac{10 \times 21}{4 \times 21} = \frac{5}{2}$.

5.2 d) On a $\frac{42 \times (-10)^2}{(-70) \times 60} = -\frac{42}{7 \times 6} = -1$.

5.3 a) On a $\frac{2^2 \times 3 \times 5}{7 \times 3^2 \times 5^2} \times \frac{5 \times 7 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 11} = \frac{2^2 \times 3 \times 5^3 \times 7}{2 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \times 11} = \frac{2 \times 5}{3^3 \times 11} = \frac{10}{297}$.

Seules les réponses (a) et (c) conviennent.

5.3 b) On a $\frac{2 \times 3 - 12}{2 \times 3^2 \times 5^2} \times \frac{5 \times 3 \times 5}{6 - 3 \times 11} = \frac{-6}{2 \times 3^2 \times 5^2} \times \frac{5 \times 3 \times 5}{-27} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$.

Seule la réponse (e) convient.

5.4 a) On a $\frac{2}{9} \times \frac{15}{2^2} = \frac{2}{3^2} \times \frac{3 \times 5}{2^2} = \frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$.

5.4 c) On a $\frac{1}{3} \times \left(\frac{-2}{4}\right)^3 \times \left(\frac{5}{7}\right)^2 \times \frac{6}{8} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{2^3} \times \frac{5^2}{7^2} \times \frac{2 \times 3}{2^3} = -\frac{5^2}{2^5 \times 7^2} = -\frac{25}{1568}$.

5.5 b) On a $-\frac{11}{15} + \frac{11}{35} = -\frac{11 \times 7}{105} + \frac{11 \times 3}{105} = \frac{-77 + 33}{105} = -\frac{44}{105}$.

5.5 c) On a $\frac{7}{30} + \frac{115}{150} = \frac{7}{30} + \frac{23}{30} = \frac{30}{30} = 1$. Ou encore (plus facilement ?) $\frac{7}{30} + \frac{115}{150} = \frac{35}{150} + \frac{115}{150} = \frac{150}{150} = 1$.

5.5 d) On a $\frac{42}{36} - \frac{22}{-3} = \frac{7}{6} + \frac{22}{3} = \frac{7 + 44}{6} = \frac{51}{6} = \frac{17}{2}$.

5.5 e) On a $\frac{-15}{6} - \frac{2}{7} = \frac{-5}{2} - \frac{2}{7} = \frac{-5 \times 7 - 2 \times 2}{2 \times 7} = -\frac{39}{14}$.

5.5 f) On a $\frac{35}{21} - \frac{53}{12} = \frac{5}{3} - \frac{53}{12} = \frac{20}{12} - \frac{53}{12} = -\frac{33}{12} = -\frac{11}{4}$.

5.5 h) On a $\frac{-90}{87} + 1 = \frac{-90 + 87}{87} = -\frac{3}{87} = -\frac{1}{29}$.

5.5 i) On a $\frac{116}{87} - 1 = \frac{116 - 87}{87} = \frac{29}{87} = \frac{1}{3}$.

5.6 a) On a $\frac{2}{3} + \frac{5}{2} - \frac{1}{7} = \frac{2 \times 2 \times 7}{3 \times 2 \times 7} + \frac{5 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 7} - \frac{2 \times 3}{7 \times 2 \times 3} = \frac{28 + 105 - 6}{42} = \frac{127}{42}$.

5.6 b) On a $\frac{2}{-15} - \frac{7}{12} + \frac{3}{10} = -\frac{2}{3 \times 5} - \frac{7}{2^2 \times 3} + \frac{3}{2 \times 5} = \frac{-2 \times 2^2 - 7 \times 5 + 3 \times 2 \times 3}{2^2 \times 3 \times 5} = -\frac{25}{60} = -\frac{5}{12}$.

5.6 c) On a $\frac{-20}{75} + \frac{3}{-45} + \frac{4}{12} = \frac{-4}{15} + \frac{1}{-15} + \frac{1}{3} = -\frac{5}{15} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$.

5.6 d) On a $\frac{-30}{21} + \frac{14}{-42} + \frac{-18}{12} - \frac{-45}{36} = \frac{-10}{7} - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{-10}{7} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{-(10 \times 12 + 28 + 21)}{84} = -\frac{169}{84}$.

5.7 a) On a $2 \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \right) \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} \right) - 1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{10} \right) \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{4} \right) - 1 = \frac{19}{30} \times \frac{5}{4} - 1 = \frac{19}{24} - 1 = -\frac{5}{24}$.

5.7 b) On a $-\left(-\frac{5}{6} + \frac{3}{4} + 1\right) + \left(3 - \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{4}\right) + 2 = -\frac{11}{12} + \frac{1}{10} + 2 = \frac{71}{60}$.

5.8 a) L'inverse de $\frac{1}{2}$ étant 2, le nombre recherché est $2 \times \frac{12}{45} \times \frac{45}{12} = 2$.

5.8 b) L'inverse de $\frac{1}{48}$ étant 48, le nombre recherché est $48 \times \left(-\frac{2}{3} + 1\right) \times \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{8}\right) = \frac{34}{7}$.

5.8 c) L'inverse de $\frac{1}{5} - (-3)^2 = -\frac{44}{5}$ étant $-\frac{5}{44}$, le nombre recherché est $-\frac{5}{44} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \times 5 \times \frac{12}{15} = \frac{135}{88}$.

Fiche n° 6. Bilan et approfondissement sur les fractions

Réponses

6.1 a)	$\frac{2}{6}$	6.4 c)	$\frac{1}{2}$	6.7 c)	$\frac{-1}{12}$
6.1 b)	$\frac{5}{6}$	6.4 d)	$\frac{-11}{10}$	6.7 d)	$\frac{29}{70}$
6.1 c)	$\frac{5}{4}$	6.4 e)	$\frac{-11}{12}$	6.7 e)	$\frac{-29}{66}$
6.1 d)	$\frac{4}{0}$	6.4 f)	$\frac{11}{24}$	6.7 f)	$\frac{-7}{18}$
6.1 e)	$\frac{0}{0}$	6.5 a)	$\frac{14}{15}$	6.8 a)	$\frac{13}{28}$
6.1 f)	$\frac{0}{4}$	6.5 b)	$\frac{-15}{14}$	6.8 b)	$\frac{43}{21}$
6.2 a)	$\frac{1}{4}$	6.5 c)	$\frac{35}{24}$	6.8 c)	$\frac{6}{5}$
6.2 b)	$\frac{-2}{3}$	6.5 d)	$\frac{-20}{7}$	6.8 d)	$\frac{-17}{7}$
6.2 c)	$\frac{-5}{2}$	6.6 a)	$\frac{6}{35}$	6.9 a)	$\frac{17x + 70}{70}$
6.2 d)	$\frac{6}{5}$	6.6 b)	$\frac{-40}{21}$	6.9 b)	$\frac{5x^2 - 38x + 48}{30x}$
6.2 e)	$\frac{-3}{7}$	6.6 c)	$\frac{10}{21}$	6.9 c)	$\frac{3x^2 - 6x - 77}{60(x - 1)}$
6.2 f)	$\frac{3}{4}$	6.6 d)	$\frac{-9}{35}$	6.9 d)	$\frac{18x^2 - 15x + 192}{-40x^2 + 164x - 64}$
6.3 a)	$\frac{5}{6}$	6.6 e)	$\frac{5}{6}$	6.10 a)	$\frac{-20x^2 - 19x - 4}{(5x + 2)(2x + 1)}$
6.3 b)	$\frac{11}{12}$	6.6 f)	$\frac{4}{21}$	6.10 b)	$\frac{-3x^3 + 14x + 9}{4 - x^2}$
6.3 c)	$\frac{11}{2}$	6.6 g)	$\frac{12}{7}$	6.10 c) ...	$\frac{8x^3 - 42x^2 + 31x - 6}{(x - 1)(25x^2 - 4)}$
6.3 d)	$\frac{11}{10}$	6.6 h)	$\frac{55}{56}$	6.10 d)	$\frac{2 + x}{3 + 2x}$
6.3 e)	$\frac{31}{12}$	6.7 a)	$\frac{9}{4}$	6.11 a)	$\frac{-45}{14}$
6.3 f)	$\frac{11}{24}$	6.7 b)	$\frac{91}{36}$		
6.4 a)	$\frac{1}{6}$				
6.4 b)	$\frac{-5}{12}$				

6.11 b) $\boxed{\frac{-17}{9}}$ 6.11 d) $\boxed{\frac{-17}{3}}$ 6.13 a) $\boxed{(1, -1)}$
 6.11 c) $\boxed{\frac{56}{47}}$ 6.12 a) $\boxed{\{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}}$ 6.13 b) $\boxed{(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})}$
 6.12 b) $\boxed{\{-2, 0, 2\}}$ 6.14 $\boxed{(\frac{999}{100}, \frac{1100}{111})}$

Corrigés

6.1 a) On a $\frac{6}{3} = 6 \div 3 = 2$.

6.2 e) On a $-\frac{60}{140} = -\frac{6 \times 10}{14 \times 10} = -\frac{3 \times 2 \times 10}{7 \times 2 \times 10} = -\frac{3}{7}$.

6.2 f) On a $-\frac{42}{-56} = \frac{42}{56} = \frac{6 \times 7}{8 \times 7} = \frac{3 \times 2 \times 7}{4 \times 2 \times 7} = \frac{3}{4}$.

6.3 a) On a $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$.

6.3 b) On a $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}$.

6.3 c) On a $\frac{5}{2} + 3 = \frac{5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{11}{2}$.

6.3 f) On a $\frac{9}{40} + \frac{7}{30} = \frac{27}{120} + \frac{28}{120} = \frac{55}{120} = \frac{11}{24}$.

6.4 a) On a $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$.

6.4 b) On a $\frac{1}{4} + \frac{-2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{-8}{12} = \frac{3-8}{12} = \frac{-5}{12}$.

6.4 c) On a $\frac{-5}{2} + 3 = \frac{-5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2}$.

6.4 d) On a $-\frac{4}{5} + \frac{-3}{10} = \frac{-8}{10} + \frac{-3}{10} = \frac{-11}{10}$.

6.4 e) On a $\frac{7}{-4} + \frac{5}{6} = \frac{-21}{12} + \frac{10}{12} = \frac{-11}{12}$.

6.5 a) On a $\frac{2}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{2 \times 7}{5 \times 3} = \frac{14}{15}$.

6.5 d) On a $-\frac{6}{-7} \times \frac{-10}{3} = -\frac{6}{7} \times \frac{10}{3} = -\frac{2}{7} \times 10 = -\frac{20}{7}$.

6.6 a) On a $\frac{2}{5} \div \frac{7}{3} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$.

6.6 c) On a $\frac{-5}{6} \div \frac{7}{-4} = \frac{-5}{6} \times \frac{-4}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{10}{21}$.

6.6 e) On a $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$.

$$\text{6.6 f)} \quad \text{On a } \frac{4}{\frac{7}{3}} = \frac{4}{7} \times \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{21}.$$

$$\text{6.6 g)} \quad \text{On a } \frac{4}{\frac{7}{3}} = 4 \times \frac{3}{7} = \frac{12}{7}.$$

$$\text{6.6 h)} \quad \text{On a } \frac{\frac{-11}{8}}{\frac{-7}{5}} = \frac{-11}{8} \times \frac{5}{-7} = \frac{11}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{55}{56}.$$

$$\text{6.7 a)} \quad \text{On a } \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{6} = \frac{5}{3} + \frac{7}{12} = \frac{20}{12} + \frac{7}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}.$$

$$\text{6.7 b)} \quad \text{On a } \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{7}{6} = \left(\frac{10}{6} + \frac{3}{6}\right) \times \frac{7}{6} = \frac{13}{6} \times \frac{7}{6} = \frac{91}{36}.$$

$$\text{6.7 c)} \quad \text{On a } \frac{3}{4} - \frac{5}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{9}{12} - \frac{10}{12} = \frac{-1}{12}.$$

$$\text{6.7 d)} \quad \text{On a } \frac{2}{7} + \frac{3}{5} \div \frac{14}{3} = \frac{2}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{14} = \frac{2}{7} + \frac{9}{70} = \frac{20}{70} + \frac{9}{70} = \frac{29}{70}.$$

$$\text{6.7 e)} \quad \text{On a } \frac{4}{9} \times \frac{-3}{11} - \frac{7}{4} \times \frac{-2}{-11} = \frac{-4}{3 \times 11} - \frac{7}{2 \times 11} = \frac{-8}{6 \times 11} - \frac{21}{6 \times 11} = \frac{-29}{66}.$$

$$\text{6.7 f)} \quad \text{On a } \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{-4} + \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{-9}{12} + \frac{2}{12}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{-7}{12} = -\frac{1}{3} \times \frac{7}{6} = -\frac{7}{18}.$$

$$\text{6.8 a)} \quad \text{On a } \frac{1}{4} - \frac{3}{7} \times \left(\frac{-3}{10} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{7} \times \left(\frac{-3}{10} - \frac{2}{10}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{7} \times \frac{-1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{14} = \frac{7}{28} + \frac{6}{28} = \frac{13}{28}.$$

$$\text{6.8 b)} \quad \text{On a } \frac{\frac{3}{4} + \frac{7}{5}}{\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{7}{5}}{\frac{3}{4} \times \frac{7}{5}} = \frac{\frac{15}{20} + \frac{28}{20}}{\frac{21}{20}} = \frac{\frac{43}{20}}{\frac{21}{20}} = \frac{43}{21}.$$

$$\text{6.8 c)} \quad \text{On a } \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{8}{12} - \frac{3}{12}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{5} = \frac{6}{5}.$$

$$\text{6.8 d)} \quad \text{On a } \frac{-1 + \frac{2}{9} \times \frac{-3}{5}}{\left(-1 + \frac{2}{9}\right) \times \frac{-3}{5}} = \frac{-1 - \frac{2}{15}}{\frac{-7}{9} \times \frac{-3}{5}} = \frac{-\frac{17}{15}}{\frac{21}{45}} = -\frac{17}{15} \times \frac{45}{21} = -\frac{17 \times 3 \times 15}{15 \times 3 \times 7} = -\frac{17}{7}.$$

$$\text{6.9 a)} \quad \text{On a } \frac{3x}{10} - \frac{2}{5} \times \frac{x}{7} + 1 = \frac{3x}{10} - \frac{2x}{35} + 1 = \frac{21x - 4x + 70}{70} = \frac{17x + 70}{70}.$$

$$\text{6.9 b)} \quad \text{On a } \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{x}\right) \times \left(\frac{1}{2}x + \frac{-4}{5}\right) = \frac{x-6}{3x} \times \frac{5x-8}{10} = \frac{(x-6)(5x-8)}{30x} = \frac{5x^2 - 38x + 48}{30x}.$$

$$\text{6.9 c)} \quad \text{On a } \frac{-4}{3x-3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{2x+1}{-5} + \frac{7x-1}{10}\right) = \frac{-4}{3(x-1)} + \frac{1}{6} \times \frac{3x-3}{10} = \frac{-80 + (3x-3)(x-1)}{60(x-1)} = \frac{3x^2 - 6x - 77}{60(x-1)}.$$

$$\text{6.9 d)} \quad \text{On a } \frac{2 - \frac{3x}{8} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{-2x+1}{4}\right)}{1 + \frac{2x-5}{3} \times \left(\frac{x-2}{8} + \frac{-3x+5}{4}\right)} = \frac{2 - \frac{3x}{8} \times \frac{5-6x}{12}}{1 + \frac{2x-5}{3} \times \frac{-5x+8}{8}} = \frac{\frac{18x^2 - 15x + 192}{96}}{\frac{-10x^2 + 41x - 16}{24}} = \frac{18x^2 - 15x + 192}{-40x^2 + 164x - 64}.$$

$$\text{6.10 a)} \quad \text{On a } \frac{2}{5x+2} - \frac{4x+3}{2x+1} = \frac{2(2x+1) - (4x+3)(5x+2)}{(2x+1)(5x+2)} = \frac{4x+2 - (20x^2 + 23x + 6)}{(5x+2)(2x+1)} = \frac{-20x^2 - 19x - 4}{(5x+2)(2x+1)}.$$

$$\text{6.10 b)} \quad \text{On a } \frac{-2x+1}{4-x^2} + 3x + \frac{4}{2-x} = \frac{-2x+1+12x-3x^3+4(2+x)}{4-x^2} = \frac{-3x^3+14x+9}{4-x^2}.$$

$$\text{6.10 c)} \quad \text{On a } \frac{2x-1}{5x+2} \times \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{4x}{5x-2}\right) = \frac{2x-1}{5x+2} \times \frac{4x^2 - 4x - 15x + 6}{(x-1)(5x-2)} = \frac{8x^3 - 42x^2 + 31x - 6}{(5x+2)(x-1)(5x-2)}.$$

6.10 d) On a $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2+x}{1+x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1+x}{2+x}} = \frac{1}{\frac{3+2x}{2+x}} = \frac{2+x}{3+2x}$.

6.11 a) Soit x un réel différent de 0. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{x} = \frac{8}{5} \iff \frac{3}{x} = \frac{2}{3} - \frac{8}{5} \iff \frac{3}{x} = -\frac{14}{15} \iff \frac{x}{3} = -\frac{15}{14} \iff x = -\frac{45}{14}.$$

6.11 b) Soit x un réel différent de 3. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{2x+5}{x-3} = \frac{-1}{4} \iff 4(2x+5) = -(x-3) \iff 8x+20 = -x+3 \iff 9x = -17 \iff x = -\frac{17}{9}.$$

6.11 c) On note (E) l'équation. Soit x un réel différent de 0. On a les équivalences suivantes :

$$(E) \iff \frac{4}{3} \times \frac{x-1}{x} = \frac{-1}{2} + \frac{5}{7} \iff \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{3}{14} \iff 1 - \frac{1}{x} = \frac{9}{56} \iff \frac{1}{x} = \frac{47}{56} \iff x = \frac{56}{47}.$$

6.11 d) Soit x un réel différent de -4 et de $-\frac{11}{2}$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{2 + \frac{3}{4+x}} = 5 \iff 10 + \frac{15}{4+x} = 1 \iff \frac{15}{4+x} = -9 \iff 4+x = -\frac{15}{9} \iff x = -\frac{51}{9} = -\frac{17}{3}.$$

6.12 a) On note (E) l'équation. Soit x un réel différent de 0 et de $-\frac{1}{3}$. On a les équivalences suivantes :

$$(E) \iff \frac{6x+24}{24} = 6 + \frac{2}{x} - 5 \iff \frac{x}{4} + 1 = 1 + \frac{2}{x} \iff \frac{x}{4} = \frac{2}{x} \iff x^2 = 8 \iff (x = \sqrt{8} \text{ ou } x = -\sqrt{8}).$$

6.12 b) On note (E) l'équation. Soit x un réel différent de 1 et de $-\frac{3}{2}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-1} + \frac{21}{8x+12} - \frac{10x-5}{4} &= \frac{24x+36+21x-21-(10x-5)(2x^2+x-3)}{4(2x+3)(x-1)} = \frac{-20x^3+80x}{4(2x+3)(x-1)} \\ &= \frac{-20(x^3-4x)}{4(2x+3)(x-1)}. \end{aligned}$$

Donc, on a les équivalences : $(E) \iff x^3-4x=0 \iff x(x^2-4)=0 \iff (x=0 \text{ ou } x^2=4) \iff x \in \{0, 2, -2\}$.

6.13 a) Pour tout réel x différent de -1 et 0, on a $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$. La propriété est donc vérifiée si on a $\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \end{cases}$, c'est-à-dire si $a=1$ et $b=-1$.

6.13 b) Pour tout réel x différent de -1 et 1, on a $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{(2a+2b)x+2a-2b}{2(x-1)(x+1)}$. La propriété est donc vérifiée si on a $\begin{cases} 2a+2b=0 \\ 2a-2b=1 \end{cases}$. Or, on a les équivalences $\begin{cases} 2a+2b=0 \\ 2a-2b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-a \\ 4a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} b=-a \\ a=\frac{1}{4} \end{cases}$.

On peut donc choisir $(a, b) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

6.14 Soit (a, b) un couple de nombres rationnels tels que $0 < a < 10$, $0 < b < 10$ et $ab = 99$. On a alors $b = \frac{99}{a} > \frac{99}{10}$ et, de même, on a $a > \frac{99}{10}$.

On choisit par exemple $a = \frac{999}{100}$ et $b = \frac{99}{a} = \frac{1\,100}{111}$. On a alors $0 < a < \frac{1\,000}{100} = 10$, $0 < b < \frac{1\,110}{111} = 10$ et $ab = 99$.

Plus généralement, les solutions sont les couples (a, b) où a est un rationnel de l'intervalle $\left]\frac{99}{10}, 10\right[$ et $b = \frac{99}{a}$.

Fiche n° 7. Fractions de fractions

Réponses

7.1 a)	$\frac{1}{6}$	7.2 f)	$\frac{35}{6}$	7.4 d)	$\frac{-1}{6}$	7.7 a)	$\frac{91}{135}$
7.1 b)	$\frac{6}{1}$	7.3 a)	$\frac{1}{12}$	7.5 a)	$\frac{27}{8}$	7.7 b)	$\frac{455}{3}$
7.1 c)	$\frac{1}{-12}$	7.3 b)	$\frac{1}{9}$	7.5 b)	$\frac{1}{28}$	7.7 c)	$\frac{-11}{11\,664}$
7.1 d)	$\frac{3}{2}$	7.3 c)	$\frac{18}{5}$	7.5 c)	$\frac{30}{41}$	7.7 d)	$\frac{-25\,344}{1}$
7.1 e)	$\frac{3}{20}$	7.3 d)	$\frac{1}{-2}$	7.5 d)	$\frac{3}{35}$	7.8 a)	$\frac{x}{x^2 + 3}$
7.1 f)	$\frac{15}{4}$	7.3 e)	$\frac{46}{45}$	7.5 e)	$\frac{9}{1}$	7.8 b)	$\frac{x^2}{(1+x)^2}$
7.2 a)	$\frac{7}{12}$	7.3 f)	$\frac{15}{4}$	7.5 f)	$\frac{96}{55}$	7.8 c)	$\frac{x-1}{x+1}$
7.2 b)	$\frac{-9}{1}$	7.4 a)	$\frac{2}{3}$	7.6 a)	$\frac{x^2}{x+1}$	7.8 d)	$\frac{x+y}{1}$
7.2 c)	$\frac{1}{15}$	7.4 b)	$\frac{3}{5}$	7.6 b)	$\frac{x}{x^2 - 1}$	7.8 e)	$\frac{2xy - x^2}{y - x}$
7.2 d)	$\frac{-16}{1}$	7.4 c)	$\frac{3}{1}$	7.6 c)	$\frac{x^2}{x^2 + 2}$	7.8 f)	$\frac{3}{4x - 2}$
7.2 e)	$\frac{-360}{1}$						

Corrigés

7.1 a) On a $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

7.1 b) On a $3 \div \frac{1}{2} = 3 \times 2 = 6$.

7.1 c) On a $\frac{\frac{2}{-3}}{8} = \frac{2}{-3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{-12}$.

7.1 e) On a $\frac{\frac{-3}{4}}{-5} = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{-5} = \frac{3}{20}$.

7.1 f) On a $\frac{\frac{-3}{4}}{\frac{-5}{1}} = -3 \times \frac{-5}{4} = \frac{15}{4}$.

7.2 a) On a $\left(2 + \frac{1}{3}\right) \div 4 = \left(2 + \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.

7.2 b) On a $3 \div \left(-1 + \frac{2}{3}\right) = 3 \div \left(\frac{-1}{3}\right) = 3 \times (-3) = -9$.

7.2 c) On a $\frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{5}}{-2} = \frac{\frac{-2}{15}}{-2} = \frac{-2}{15} \times \frac{1}{-2} = \frac{1}{15}$.

7.2 d) On a $\frac{-4}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{-4}{\frac{1}{4}} = -4 \times 4 = -16$.

7.2 e) On a $\frac{12}{\frac{1}{6} - \frac{1}{5}} = \frac{12}{\frac{-1}{30}} = 12 \times (-30) = -360$.

7.2 f) On a $\frac{13}{\frac{3}{7} - \frac{-9}{5}} = \frac{13}{\frac{3}{7} + \frac{9}{5}} = \frac{13}{\frac{78}{35}} = \frac{13 \times 35}{13 \times 6} = \frac{35}{6}$.

7.3 a) On a $\frac{3 \times \frac{2}{9}}{8} = \frac{\frac{2}{3}}{8} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$.

7.3 b) On a $\frac{5 \times \frac{1}{3}}{15} = \frac{\frac{5}{3}}{15} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{9}$.

7.3 c) On a $\frac{27}{6 \times \frac{5}{4}} = \frac{3 \times 9}{3 \times \frac{5}{2}} = 9 \times \frac{2}{5} = \frac{18}{5}$.

7.3 d) On a $\frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5}}{\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}} = \frac{\frac{-1}{15}}{\frac{2}{15}} = \frac{-1}{2}$.

7.3 e) On a $\frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{4}}{\frac{3}{2} \div \frac{4}{5}} = \frac{\frac{23}{12}}{\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}} = \frac{\frac{23}{12}}{\frac{15}{8}} = \frac{23}{4 \times 3} \times \frac{4 \times 2}{15} = \frac{46}{45}$.

7.3 f) On a $\frac{\frac{3}{5} \times \frac{20}{6}}{\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{5 \times 4}{3 \times 2}}{\frac{8}{15}} = \frac{2}{\frac{8}{15}} = 2 \times \frac{15}{2 \times 4} = \frac{15}{4}$.

7.4 a) On a $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$.

7.4 b) On a $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$.

7.4 c) On a $\frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$.

7.4 d) On a $\frac{2}{1 - \frac{2}{1 - \frac{1}{3}}} = \frac{2}{1 - 3} = -1$.

7.5 a) On a $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{9}} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{8}$.

7.5 b) On a $\frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{10}{10} - \frac{5}{10}}{\frac{14}{5}} = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{14}{5}} = \frac{1}{5 \times 2} \times \frac{5}{14} = \frac{1}{28}$.

7.5 c) On a $\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} + \frac{7}{8}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{41}{24}} = \frac{5}{4} \times \frac{6 \times 4}{41} = \frac{30}{41}$.

7.5 d) On a $\frac{\frac{8}{7} - \frac{6}{5}}{\frac{4}{3} - 2} = \frac{\frac{-2}{35}}{\frac{-2}{3}} = \frac{-2}{35} \times \frac{3}{-2} = \frac{3}{35}$.

7.5 e) On a $\frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{3}{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^2 = 9$.

7.5 f) On a $\frac{\left(\frac{11}{5} - 1\right)\left(\frac{11}{5} + 1\right)}{\frac{11}{5}} = \frac{\frac{6}{5} \times \frac{16}{5}}{\frac{11}{5}} = \frac{6}{5} \times \frac{16}{5} \times \frac{5}{11} = \frac{6 \times 16}{5 \times 11} = \frac{96}{55}$.

7.6 a) On a $\frac{x}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{\frac{x+1}{x}} = x \times \frac{x}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$.

7.6 b) On a $\frac{1}{x - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x^2-1}{x}} = \frac{x}{x^2-1}$.

7.6 c) On a $\frac{x}{x + \frac{2}{x}} = \frac{x}{\frac{x^2+2}{x}} = x \times \frac{x}{x^2+2} = \frac{x^2}{x^2+2}$.

7.7 a) On a $\frac{\frac{21 \times 3 \times 5 \times 26}{30 \times 27}}{15} = \frac{21 \times 3 \times 5 \times 26}{30 \times 27 \times 15} = \frac{3 \times 7 \times 3 \times 5 \times 2 \times 13}{2 \times 15 \times 3 \times 9 \times 3 \times 5} = \frac{7 \times 13}{15 \times 9} = \frac{91}{135}$.

7.7 b) On a $\frac{\frac{21 \times 3 \times 5 \times 26}{30 \times 27}}{\frac{15}{15}} = \frac{21 \times 3 \times 5 \times 26 \times 15}{30 \times 27} = \frac{3 \times 7 \times 3 \times 5 \times 2 \times 13 \times 3 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{7 \times 13 \times 5}{3} = \frac{455}{3}$.

7.7 c) On a $\frac{\frac{2 \times 56 \times 12 \times 55}{-27 \times 80 \times 7}}{36 \times 12^2} = \frac{2 \times 56 \times 12 \times 55}{-27 \times 80 \times 7 \times 36 \times 12 \times 12} = \frac{11}{-27 \times 36 \times 12} = -\frac{11}{11\,664}$.

7.7 d) On a $\frac{\frac{2 \times 56 \times 12 \times 55}{-27 \times 80 \times 7}}{\frac{36 \times 12^2}{-9 \times 3 \times 8 \times 5 \times 2 \times 7}} = \frac{2 \times 7 \times 8 \times 3 \times 4 \times 5 \times 11 \times 9 \times 4 \times 12 \times 12}{-4 \times 11 \times 4 \times 12 \times 12} = -25\,344$.

7.8 a) On a $\frac{1}{x + \frac{3}{x}} = \frac{1}{\frac{x^2+3}{x}} = \frac{x}{x^2+3}$.

7.8 b) On a $\frac{\frac{x}{1+\frac{1}{x}}}{1+x} = \frac{x}{\frac{x+1}{x}} \times \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \times \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{(1+x)^2}$.

7.8 c) On a $\frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}$.

7.8 d) On a $\frac{\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x^2-y^2}} = \frac{x^2-y^2}{x-y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = x+y$.

7.8 e) On a $x + \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = x + \frac{1}{\frac{y-x}{xy}} = x + \frac{xy}{y-x} = \frac{2xy - x^2}{y-x}$.

7.8 f) On a $\frac{1}{1 + \frac{x+1}{2-x}} = \frac{1}{\frac{2-x+x+1}{2-x}} = \frac{2-x}{3}$, donc $\frac{1}{x - \frac{1}{1 + \frac{x+1}{2-x}}} = \frac{1}{x - \frac{2-x}{3}} = \frac{1}{\frac{4x-2}{3}} = \frac{3}{4x-2}$.

Fiche n° 8. Fractions d'expressions

Réponses

8.1 a)	$\frac{n+1}{n}$	8.2 e)	$\frac{-27x+1}{9x+2}$	8.4 c)	$\frac{1}{x(x+1)}$
8.1 b)	$\frac{n}{n+1}$	8.2 f)	$\frac{75x}{5x+7}$	8.5 a)	$2n+1$
8.1 c)	$-\frac{1}{n(n+1)}$	8.3 a)	$\frac{11}{(x-9)(x+2)}$	8.5 b)	$n(n-1)$
8.1 d)	$\frac{n+2}{(n+1)^2}$	8.3 b)	$\frac{11(x-1)}{(x-9)(x+2)}$	8.5 c)	$\frac{2n+1}{n(n-1)}$
8.1 e)	$\frac{n-1}{n^2}$	8.3 c)	$\frac{x+3}{2(x+2)}$	8.5 d)	$\frac{n+1}{n-1}$
8.1 f)	$\frac{1}{n}$	8.3 d)	$\frac{3x^2+9x+17}{(x-9)(x+2)}$	8.5 e)	$\frac{n(n+1)}{2n+1}$
8.2 a)	$\frac{x+3}{x-2}$	8.3 e)	$\frac{-x^2+21x-9}{(x-9)(x+2)}$	8.5 f)	$\frac{(n+1)(2n+1)}{n-1}$
8.2 b)	$\frac{2x+3}{x-1}$	8.3 f)	$\frac{13x-40}{21(x-9)(x+2)}$	8.6 a)	$\frac{2}{n(2n+1)}$
8.2 c)	$\frac{3x+70}{x+25}$	8.4 a)	$\frac{1}{x(x+2)}$	8.6 b)	$\frac{1}{n^2+n+1}$
8.2 d)	$\frac{6x+7}{2x-1}$	8.4 b)	$\frac{1}{(x+1)(x+2)}$	8.6 c)	$\frac{n^2-n+1}{2n+1}$
				8.6 d)	$\frac{2(n+1)}{n(n-1)}$

Corrigés

8.1 b) On a $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

8.1 c) On a $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)}$.

8.1 d) On a $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n+1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n+1+1}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{(n+1)^2}$.

8.1 f) On a $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$.

8.2 a) On a $1 + \frac{5}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{5}{x-2} = \frac{x-2+5}{x-2} = \frac{x+3}{x-2}$.

8.2 b) On a $2 + \frac{5}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1} + \frac{5}{x-1} = \frac{2x-2+5}{x-1} = \frac{2x+3}{x-1}$.

8.2 c) On a $3 - \frac{5}{x+25} = \frac{3(x+25) - 5}{x+25} = \frac{3x+75-5}{x+25} = \frac{3x+70}{x+25}$.

8.2 e) On a $\frac{7}{9x+2} - 3 = \frac{7-3(9x+2)}{9x+2} = \frac{7-27x-6}{9x+2} = \frac{-27x+1}{9x+2}$.

8.2 f) On a $15 - \frac{105}{5x+7} = \frac{15(5x+7) - 105}{5x+7} = \frac{75x+105-105}{5x+7} = \frac{75x}{5x+7}$.

8.3 a) On a $\frac{1}{x-9} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2}{(x-9)(x+2)} - \frac{x-9}{(x-9)(x+2)} = \frac{x+2-(x-9)}{(x-9)(x+2)} = \frac{11}{(x-9)(x+2)}$.

8.3 b) On a $\frac{3}{x+2} + \frac{8}{x-9} = \frac{3(x-9)+8(x+2)}{(x-9)(x+2)} = \frac{3x-27+8x+16}{(x-9)(x+2)} = \frac{11x-11}{(x-9)(x+2)} = \frac{11(x-1)}{(x-9)(x+2)}$.

8.3 c) On a $\frac{3x+1}{x+2} - \frac{5x-1}{2x+4} = \frac{2(3x+1)-(5x-1)}{2(x+2)} = \frac{x+3}{2(x+2)}$.

8.3 d) On a $\frac{3x+4}{x-9} - \frac{1}{x+2} = \frac{(3x+4)(x+2)-(x-9)}{(x-9)(x+2)} = \frac{3x^2+6x+4x+8-x+9}{(x-9)(x+2)} = \frac{3x^2+9x+17}{(x-9)(x+2)}$.

8.3 e) On a $\frac{x}{x-9} - \frac{2x-1}{x+2} = \frac{x(x+2)-(2x-1)(x-9)}{(x-9)(x+2)} = \frac{x^2+2x-(2x^2-18x-x+9)}{(x-9)(x+2)}$
 $= \frac{x^2+2x-2x^2+18x+x-9}{(x-9)(x+2)} = \frac{-x^2+21x-9}{(x-9)(x+2)}$.

8.3 f) On a $\frac{1}{3(x-9)} + \frac{2}{7(x+2)} = \frac{7(x+2)+2 \times 3(x-9)}{3(x-9) \times 7(x+2)} = \frac{7x+14+6x-54}{21(x-9)(x+2)} = \frac{13x-40}{21(x-9)(x+2)}$.

8.4 a) On a $\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{x+2}{x(x+1)(x+2)} - \frac{x+1}{x(x+1)(x+2)} + \frac{x}{x(x+1)(x+2)}$
 $= \frac{x+2-(x+1)+x}{x(x+1)(x+2)} = \frac{x+2-x-1+x}{x(x+1)(x+2)}$
 $= \frac{x+1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x(x+2)}$.

8.4 b) On a $\frac{2}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{x(x+1)} - \frac{2}{x(x+2)} = \frac{2x+(x+2)-2(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{2x+x+2-2x-2}{x(x+1)(x+2)}$
 $= \frac{x}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

8.5 d) On a $\frac{A^2}{C} = \frac{[n(n+1)]^2}{(n-1)n^2(n+1)} = \frac{n^2(n+1)^2}{(n-1)n^2(n+1)} = \frac{n+1}{n-1}$.

8.5 f) On a $\frac{AB}{C} = \frac{n(n+1) \times n(n+1)(2n+1)}{(n-1)n^2(n+1)} = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{(n-1)n^2(n+1)} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n-1}$.

8.6 a) On a $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{2n+1}{n(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$
 $= \frac{2n+2}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{2}{n(2n+1)}$.

8.6 b) On a $\frac{A}{B+C} = \frac{n(n+1)}{n(n+1)(2n+1) + (n-1)n^2(n+1)} = \frac{n(n+1)}{n(n+1)[(2n+1) + (n-1)n]}$
 $= \frac{1}{2n+1+n^2-n} = \frac{1}{n^2+n+1}$.

8.6 d) On a $\frac{A+B}{C} = \frac{n(n+1)+n(n+1)(2n+1)}{(n-1)n^2(n+1)} = \frac{n(n+1)[1+(2n+1)]}{(n-1)n^2(n+1)} = \frac{2n+2}{(n-1)n} = \frac{2(n+1)}{n(n-1)}$.

Fiche n° 9. Comparaison de fractions

Réponses

9.1 a).....	$\frac{1}{2} > \frac{3}{8}$	9.3 c).....	$0,81 < \frac{9}{11}$	9.6 b).....	$\frac{9}{5} < 1,85 < \frac{450}{240}$
9.1 b).....	$\frac{2}{7} < \frac{1}{3}$	9.4 a).....	$\frac{15}{35} > \frac{6}{21}$	9.6 c).....	$\frac{2}{5} < \frac{5}{12} < \frac{11}{24} < \frac{14}{30}$
9.1 c).....	$\frac{22}{7} > \frac{2}{8}$	9.4 b).....	$\frac{210}{49} < \frac{52}{12}$	9.6 d).....	$\frac{16}{7} < 2,3 < \frac{7}{3}$
9.1 d).....	$\frac{15}{7} < \frac{33}{15}$	9.4 c).....	$\frac{2}{75} < \frac{3}{65}$	9.7 a)....	$\frac{86}{25} < \frac{7}{2} < 3,53 < \frac{36}{10}$
9.2 a).....	$\frac{4}{17} > \frac{3}{13}$	9.4 d).....	$\frac{120}{189} > \frac{5}{8}$	9.7 b).....	$\frac{17}{20} < \frac{7}{8} < 0,9 < \frac{11}{12}$
9.2 b).....	$\frac{5}{6} > \frac{11}{14}$	9.5 a) ..	$\alpha = \frac{85}{100}$ (par exemple)	9.7 c)....	$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} < \frac{1}{3} + \frac{1}{7} < \frac{1}{2}$
9.2 c).....	$\frac{29}{15} > \frac{23}{12}$	9.5 b) ..	$\alpha = \frac{675}{100}$ (par exemple)	9.8 a).....	$\frac{85}{63}$
9.2 d).....	$\frac{2450}{500} < 4,91$	9.5 c) ..	$\alpha = \frac{241}{220}$ (par exemple)	9.8 b).....	$\frac{14}{23}$
9.3 a).....	$\frac{28}{103} > \frac{7}{32}$	9.5 d) ...	$\alpha = \frac{97}{28}$ (par exemple)	9.9 a).....	$\frac{1}{1 + \frac{2}{a}} < \frac{1}{1 + \frac{1}{a+1}}$
9.3 b).....	$\frac{81}{121} < \frac{9}{13}$	9.6 a).....	$\frac{2}{9} < \frac{4}{15} < \frac{5}{18}$	9.9 b)...	$\frac{3}{3 + \frac{2}{4a+1}} > \frac{2}{2 + \frac{3}{6a+1}}$

Corrigés

9.1 a) On a $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8} > 0$. Ainsi, $\frac{1}{2} > \frac{3}{8}$.

9.1 b) On a $\frac{2}{7} - \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{7 \times 3} - \frac{1 \times 7}{3 \times 7} = \frac{-1}{21} < 0$. Ainsi, $\frac{2}{7} < \frac{1}{3}$.

9.1 c) On a $\frac{22}{7} - \frac{25}{8} = \frac{22 \times 8}{7 \times 8} - \frac{25 \times 7}{8 \times 7} = \frac{176 - 175}{56} = \frac{1}{56} > 0$. Ainsi, $\frac{22}{7} > \frac{25}{8}$.

9.2 b) On a $\frac{5}{6} - \frac{11}{14} = \frac{5 \times 7}{6 \times 7} - \frac{11 \times 3}{14 \times 3} = \frac{35 - 33}{42} = \frac{2}{42} > 0$. Ainsi, $\frac{5}{6} > \frac{11}{14}$.

9.2 c) On a $\frac{29}{15} - \frac{23}{12} = \frac{4 \times 29}{60} - \frac{23 \times 5}{60} = \frac{116 - 115}{60} = \frac{1}{60} > 0$. Ainsi, $\frac{29}{15} > \frac{23}{12}$.

9.2 d) On a $\frac{2450}{500} - 4,91 = \frac{245}{50} - \frac{491}{100} = \frac{490}{100} - \frac{491}{100} = \frac{-1}{100} < 0$. Ainsi, $\frac{2450}{500} < 4,91$.

9.3 a) On a $\frac{7}{32} = \frac{7 \times 4}{32 \times 4} = \frac{28}{128} < \frac{28}{103}$.

9.3 c) On a $0,81 = \frac{81}{100}$ et donc $\frac{9}{11} = \frac{9 \times 9}{11 \times 9} = \frac{81}{99} > \frac{81}{100}$. Ainsi, $0,81 < \frac{9}{11}$.

9.4 a) On travaille sur la fraction $\frac{15}{35}$ qui est réductible. On a $\frac{15}{35} = \frac{5 \times 3}{5 \times 7} = \frac{3}{7} = \frac{3 \times 3}{7 \times 3} = \frac{9}{21}$. Ainsi, $\frac{15}{35} > \frac{6}{21}$.

9.4 b) On a $\frac{210}{49} = \frac{30}{7}$ et $\frac{52}{12} = \frac{13}{3}$. Dès lors, $\frac{210}{49} - \frac{52}{12} = \frac{30}{7} - \frac{13}{3} = \frac{90}{21} - \frac{91}{21} = \frac{-1}{21} < 0$. Ainsi, $\frac{210}{49} < \frac{52}{12}$.

9.4 d) On utilise le fait que 120 est un multiple de 5. On a $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 24}{8 \times 24} = \frac{120}{192} < \frac{120}{189}$. Ainsi, $\frac{120}{189} > \frac{5}{8}$.

9.5 c) On met au même dénominateur les extrémités de l'inégalité. On a $\frac{12}{11} = \frac{120}{110}$ et $\frac{11}{10} = \frac{121}{110}$.

On met alors chaque fraction sur un dénominateur plus grand pour trouver un nombre entier au numérateur.

On a $\frac{12}{11} = \frac{120}{110} = \frac{240}{220}$ et $\frac{11}{10} = \frac{121}{110} = \frac{242}{220}$. Le nombre $\alpha = \frac{241}{220}$ convient. (On aurait pu en prendre d'autres!)

9.6 a) Le nombre 90 est un multiple commun de chacun des dénominateurs car $90 = 9 \times 10 = 15 \times 6 = 18 \times 5$.

On a $\frac{2}{9} = \frac{20}{90}$, $\frac{4}{15} = \frac{24}{90}$ et $\frac{5}{18} = \frac{25}{90}$. Ces égalités permettent de conclure en comparant les numérateurs.

9.6 b) On utilise le fait que $\frac{450}{240} = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}$ et que $1,85 = \frac{185}{100}$. En mettant au même dénominateur :

$$\frac{450}{240} = \frac{15}{8} = \frac{15 \times 25}{8 \times 25} = \frac{375}{200} \quad \text{et} \quad 1,85 = \frac{185}{100} = \frac{370}{200}.$$

9.7 c) On a $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{3 \times 7}$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{4 \times 5}$. Ainsi, $3 \times 7 \times 4 \times 5$ est un multiple commun des dénominateurs.

On a $\frac{1}{2} = \frac{210}{420}$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21} = \frac{200}{420}$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} = \frac{189}{420}$. La conclusion s'ensuit en comparant les numérateurs.

9.8 a) On calcule chacun des max séparément puis on conclut. On a $\frac{11}{7} - \frac{12}{9} = \frac{99}{7 \times 9} - \frac{84}{9 \times 7} = \frac{15}{63} > 0$.

On a donc $\max\left(\frac{11}{7}, \frac{12}{9}\right) = \frac{11}{7}$. Ensuite, on a $\frac{2}{9} = \frac{4}{18} > \frac{4}{19}$ et donc $\max\left(\frac{4}{19}, \frac{2}{9}\right) = \frac{2}{9}$. Finalement, on a :

$$\max\left(\frac{11}{7}, \frac{12}{9}\right) - \max\left(\frac{4}{19}, \frac{2}{9}\right) = \frac{11}{7} - \frac{2}{9} = \frac{99}{7 \times 9} - \frac{14}{9 \times 7} = \frac{85}{63}.$$

9.8 b) On a $\frac{1}{2 - \frac{2}{7}} = \frac{1}{\frac{14}{7} - \frac{2}{7}} = \frac{1}{\frac{12}{7}} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} < \frac{14}{23}$. Ainsi, $\max\left(\frac{1}{2 - \frac{2}{7}}, \frac{14}{23}\right) = \frac{14}{23}$.

9.9 a) On écrit chacune des expressions de la question sous la forme d'une seule fraction.

On a $\frac{1}{1 + \frac{2}{a}} = \frac{1}{\frac{a}{a} + \frac{2}{a}} = \frac{1}{\frac{a+2}{a}} = \frac{a}{a+2}$. De même, $\frac{1}{1 + \frac{1}{a+1}} = \frac{1}{\frac{a+1+1}{a+1}} = \frac{a+1}{a+2}$.

Ainsi, $\frac{1}{1 + \frac{2}{a}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{a+1}} = \frac{a}{a+1} - \frac{a+1}{a+2} = \frac{-1}{a+2} < 0$ (car $a > 0$ et donc $a+2 > 0$). Finalement, $\frac{1}{1 + \frac{2}{a}} < \frac{1}{1 + \frac{1}{a+1}}$.

9.9 b) On a $\frac{3}{3 + \frac{2}{4a+1}} = \frac{3}{\frac{3(4a+1)}{4a+1} + \frac{2}{4a+1}} = \frac{3}{\frac{12a+5}{4a+1}} = \frac{3(4a+1)}{12a+5} = \frac{12a+3}{12a+5}$. De même, on a $\frac{2}{2 + \frac{3}{6a+1}} = \frac{12a+2}{12a+5}$.

Ainsi, $\frac{3}{3 + \frac{2}{4a+1}} - \frac{2}{2 + \frac{3}{6a+1}} = \frac{1}{12a+5} > 0$ (car $a > 0$, donc $12a > 0$ et $12a+5 > 0$) et la conclusion s'ensuit.

Fiche n° 10. Généralités sur les puissances

Réponses

10.1 a).....	a^8	10.3 b).....	a^{-2}	10.6 c).....	$(x-5)^{5-2m}$
10.1 b).....	a^7	10.3 c).....	$\left(\frac{2}{3}\right)^m$	10.7 a).....	a^7
10.1 c).....	2^{m+n}	10.3 d).....	$a^2 \times b^{41}$	10.7 b).....	$a^{10} \times b$
10.1 d).....	5^{m-4}	10.3 e).....	a^{-6-m}	10.7 c).....	$a^{13} \times b^{-11}$
10.1 e).....	$(a \times b)^5$	10.3 f).....	b^{m-n+2}	10.7 d).....	$a^{-78} \times b^{325}$
10.1 f).....	8^{n-m}	10.4 a).....	2^{m-n-5}	10.7 e).....	$a^5 \times b^{-7}$
10.2 a).....	2^{m+2}	10.4 b).....	$3^{m+2n-18}$	10.7 f).....	b^{20}
10.2 b).....	3^{m+10}	10.4 c).....	$2^{2n+4} \times 3^{m-5}$	10.8 a).....	2^{m+1}
10.2 c).....	2^{48m}	10.4 d).....	$3^{10m} \times 5^{5n}$	10.8 b).....	2^{8m-8}
10.2 d).....	3^{-35m}	10.5 a).....	$x^{-4} \times y^{2m-20}$	10.8 c).....	$2^{-3m} \times 3^{2n-3}$
10.2 e).....	2^{-13m}	10.5 b).....	$x^{m-4n} \times y^{-4n}$	10.8 d).....	$2^{22m+2} \times 3^{2n}$
10.2 f).....	3^{-55m}	10.6 a).....	$(x-5)^{m-2}$	10.8 e).....	3^{4m+3}
10.3 a).....	a^{31}	10.6 b).....	$(x-8)^{6-3m}$	10.8 f).....	2^{5-m}

Corrigés

10.1 a) On a $a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$.

10.1 b) On a $\frac{a^9}{a^2} = a^{9-2} = a^7$.

10.2 a) On a $2^m \times 4 = 2^m \times 2^2 = 2^{m+2}$.

10.2 b) On a $3^m \times 9^5 = 3^m \times (3^2)^5 = 3^m \times 3^{2 \times 5} = 3^{m+10}$.

10.2 c) On a $4^{11m} = (2^2)^{11m} = 2^{22m}$ donc $2^{26m} \times 4^{11m} = 2^{26m+22m} = 2^{48m}$.

10.2 d) On a $\frac{9^{-14m}}{3^{7m}} = \frac{(3^2)^{-14m}}{3^{7m}} = 3^{-28m-7m} = 3^{-35m}$.

10.2 e) On a $8 = 2^3$ et $4 = 2^2$.

10.2 f) On a $27 = 3^3$.

10.3 a) On a $a^4 \times a^3 \times a^{24} = a^{4+3+24} = a^{31}$.

10.3 b) On a $\frac{a^9 \times a^4}{a^8 \times a^7} = \frac{a^{9+4}}{a^{8+7}} = \frac{a^{13}}{a^{15}} = a^{13-15} = a^{-2}$.

10.3 c) On a $\frac{5^m \times 4^m}{10^m \times 3^m} = \frac{5^m \times 2^{2m}}{5^m \times 2^m \times 3^m} = \frac{2^m}{3^m} = \left(\frac{2}{3}\right)^m$.

10.3 d) On a $a^5 \times b^{23} \times a^{-3} \times b^{18} = a^{5+(-3)} \times b^{23+18} = a^2 b^{41}$.

10.3 e) On a $\frac{a^m \times a^2 \times a^{-3}}{a^5 \times a^{2m}} = a^{m+2+(-3)-5-2m} = a^{-m-6}$.

10.3 f) On a $\frac{a^5 \times b^m \times a^{-12} \times b^2}{b^n \times a^4 \times a^{-11}} = \frac{a^5 \times a^{-12}}{a^4 \times a^{-11}} \times \frac{b^m \times b^2}{b^n} = a^{5-12-(4-11)} \times b^{m+2-n} = a^0 b^{m+2-n} = 1 \times b^{m+2-n}$.

10.4 a) On a $\frac{2^m \times 4^2}{8^3 \times 2^n} = \frac{2^m \times (2^2)^2}{(2^3)^3 \times 2^n} = 2^{m+4-9-n} = 2^{m-n-5}$.

10.4 b) On a $\frac{3^m \times 9^n}{27^6} = \frac{3^m \times (3^2)^n}{(3^3)^6} = 3^{m+2n-18}$.

10.4 c) On a $\frac{8^n \times 3^m \times 16}{27 \times 2^n \times 9} = \frac{(2^3)^n \times 3^m \times 2^4}{3^3 \times 2^n \times 3^2} = 2^{3n+4-n} \times 3^{m-3-2} = 2^{2n+4} \times 3^{m-5}$.

10.4 d) On a $81^m \times 25^n \times 3^{6m} \times 125^n = (3^4)^m \times (5^2)^n \times 3^{6m} \times (5^3)^n = 3^{4m+6m} \times 5^{2n+3n} = 3^{10m} \times 5^{5n}$.

10.5 a) On a $\frac{(x^4 \times y^m)^2}{(x^3 \times y^5)^4} = \frac{(x^4)^2 \times (y^m)^2}{(x^3)^4 \times (y^5)^4} = x^{8-12} \times y^{2m-20}$.

10.5 b) On a $\frac{x^m \times y^n}{(x^4 \times y^5)^n} = \frac{x^m \times y^n}{x^{4n} \times y^{5n}} = x^{m-4n} \times y^{n-5n}$.

10.6 a) On a $\frac{(x-5)^m}{(x-5)^2} = (x-5)^{m-2}$.

10.6 b) On a $\frac{(x-8)^6}{((x-8)^m)^3} = \frac{(x-8)^6}{(x-8)^{3m}} = (x-8)^{6-3m}$.

10.6 c) On a $\frac{(x-5)^5}{((x-5)^2)^m} = \frac{(x-5)^5}{(x-5)^{2m}} = (x-5)^{5-2m}$.

10.7 a) On calcule $\frac{a^8 \times a^3}{a^4}$.

10.7 b) On calcule $\frac{a^6 \times (a \times b)}{a^{-3}}$.

10.7 e) On calcule $\frac{(a^3 \times b^{-4}) \times a^8 \times b^{-2}}{a^6 \times b}$.

10.8 c) On calcule $\frac{(2^m \times 9^n) \times (2^{3m} \times 3^n)}{2^{7m} \times 3^{n+3}} = \frac{2^m \times 2^{3m}}{2^{7m}} \times \frac{(3^2)^n \times 3^n}{3^{n+3}} = 2^{m+3m-7m} \times 3^{2n+n-(n+3)}$.

10.8 e) On calcule $\frac{3^m \times 3^{8m+5}}{3^{5m+2}}$.

10.8 f) On calcule $\frac{2^5 \times 2^m}{4^m}$ en utilisant que $4^m = (2^2)^m = 2^{2m}$.

Fiche n° 11. Puissances et fractions

Réponses

11.1 a).....	$2^2 \times 3 \times 5$	11.3 b).....	$2^4 \times 3^{-10} \times 5^{-6}$	11.7 a).....	$\frac{5}{162}$
11.1 b).....	$2^3 \times 3^4 \times 5^4$	11.4 a).....	$2^2 \times 3^{-7} \times 5^{12}$	11.7 b).....	10
11.1 c).....	$2^3 \times 3^2 \times 5^2$	11.4 b).....	$2^{-14} \times 3^{-5} \times 5^2$	11.7 c).....	$-\frac{15}{2}$
11.1 d).....	$2 \times 3^2 \times 5^5$	11.5 a).....	$\frac{72^n}{12}$	11.8 a).....	2^{-2}
11.2 a).....	$2 \times 3^{-2} \times 5$	11.5 b).....	x^{2n-3}	11.8 b).....	5^{-1}
11.2 b).....	$2^{-2} \times 3^{-1} \times 5^{-2}$	11.5 c).....	$\frac{x^{6n-1}}{4}$	11.8 c).....	$2^{-2} \times 3$
11.2 c).....	$2^4 \times 3^3 \times 5^{-2}$	11.6 a).....	$2^4 \times 3^{12} \times 5^{-2}$	11.8 d).....	$2^{-2} \times 3 \times 5^{-3}$
11.2 d).....	$2^{-1} \times 3^{-2} \times 5^2$	11.6 b).....	$-2^{-9} \times 3^{-7} \times 5^8$	11.8 e).....	$2^2 \times 3 \times 5^{-1}$
11.3 a).....	$2^{-1} \times 3^{-2} \times 5^{-1}$	11.6 c).....	$-2^{-10} \times 3^2 \times 5^{-1}$	11.8 f).....	$2^{-2} \times 5^2$

Corrigés

11.1 a) On rappelle les formules suivantes, que l'on utilisera constamment dans cette fiche : pour deux entiers relatifs n et p , ainsi qu'un réel non nul x , on a $x^n \times x^p = x^{n+p}$ et $\frac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$. On obtient alors :

$$\frac{2^4 \times 3^5 \times 5^3}{5^2 \times 3^4 \times 2^2} = 2^{4-2} \times 3^{5-4} \times 5^{3-2} = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 2^2 \times 3 \times 5.$$

11.1 d) Voici deux autres formules que l'on rappelle et utilisera également dans cette fiche : pour deux réels non nuls x et y , ainsi qu'un entier relatif n , on a $x^n \times y^n = (x \times y)^n$ et $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{15^3 \times 2^2 \times 3 \times 25^2}{30^3} \times \frac{6^2 \times 10^2}{4 \times 15} &= \frac{(3 \times 5)^3 \times 2^2 \times 3 \times (5 \times 5)^2}{(2 \times 3 \times 5)^3} \times \frac{(2 \times 3)^2 \times (2 \times 5)^2}{(2^2 \times (3 \times 5))} \\ &= \frac{3^3 \times 5^3 \times 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 5^2}{2^3 \times 3^3 \times 5^3} \times \frac{2^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 5^2}{2^2 \times 3 \times 5} \\ &= 2^{2-3+2+2-2} \times 3^{3+1-3+2-1} \times 5^{3+2+2-3+2-1} \\ &= 2 \times 3^2 \times 5^5. \end{aligned}$$

11.4 a) On rappelle que, pour un réel non nul x et un entier n , on a $(-x)^n = x^n$ lorsque n est pair et $(-x)^n = -x^n$ lorsque n est impair. Ainsi, on a $(-3)^3 = -3^3$, $(-5)^{-7} = -5^{-7}$ et $(-2)^{-2} = 2^{-2}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{2 \times 3^{-3} \times 5^2 \times (-3)^3 \times 2^2 \times 5^4}{(-5)^{-7} \times 3^2 \times 2^3 \times 5^1 \times 3^5 \times (-2)^{-2}} &= \frac{2 \times 3^{-3} \times 5^2 \times (-3^3) \times 2^2 \times 5^4}{-5^{-7} \times 3^2 \times 2^3 \times 5^1 \times 3^5 \times 2^{-2}} \\ &= 2^{1+2-3+2} \times 3^{-3+3-2-5} \times 5^{2+4+7-1} \\ &= 2^2 \times 3^{-7} \times 5^{12}. \end{aligned}$$

11.4 b) On rappelle enfin la formule suivante : $(x^n)^p = x^{n \times p}$, où n et p sont des entiers relatifs, et x est un réel non nul. On a alors $(4^2)^{-1} = 4^{-2} = (2^2)^{-2} = 2^{-2 \times 2} = 2^{-4}$ et $(6^3 \times 2^2)^2 = 6^{3 \times 2} \times 2^{2 \times 2} = 6^6 \times 2^4 = 2^6 \times 3^6 \times 2^4 = 2^{10} \times 3^6$. Puis, finalement :

$$\begin{aligned} \frac{2^3}{5 \times (6^3 \times 2^2)^2} \times \frac{3^2 \times (4^2)^{-1}}{(-2)^2 \times 5^3} \times \frac{5^6}{2 \times 3} &= \frac{2^3}{5 \times 2^{10} \times 3^6} \times \frac{3^2 \times 2^{-4}}{2^2 \times 5^3} \times \frac{5^6}{2 \times 3} \\ &= 2^{3-10-4-2-1} \times 3^{2-6-1} \times 5^{6-1-3} = 2^{-14} \times 3^{-5} \times 5^2. \end{aligned}$$

11.5 a) On a :

$$\frac{(3^n)^2 \times 6^{-n}}{12^{1-n}} \times 2^{2n} = \frac{3^{2n} \times 2^{-n} \times 3^{-n}}{3^{1-n} \times 2^{2(1-n)}} \times 2^{2n} = 3^{2n-1} \times 2^{3n-2} = (3^2 \times 2^3)^n \times (3 \times 2^2)^{-1} = \frac{72^n}{12}.$$

11.5 b) On a $\frac{(x^n)^3}{x^{n+3}} = x^{3n-(n+3)} = x^{2n-3}$.

11.5 c) On a $\frac{x \times (2x)^{5n}}{\left(\frac{x}{2}\right)^{-3n} \times ((2x)^2)^{n+1}} = \frac{x \times 2^{5n} \times x^{5n}}{(x^{-3n} \times 2^{3n}) \times (2^{2(n+1)} \times x^{2(n+1)})} = 2^{-2} \times x^{6n-1} = \frac{x^{6n-1}}{4}$.

11.6 b) Puisque $\frac{3^2}{500} = 3^2 \times 2^{-2} \times 5^{-3} = 9 \times 2^{-2} \times 5^{-3}$ et $(6^3 \times 2^2)^2 = (2^5 \times 3^3)^2 = 2^{10} \times 3^6$, on a :

$$\frac{2^4}{5 \times (6^3 \times 2^2)^2} \times \frac{9 \times (-2^4)^{-1}}{\frac{3^2}{500}} \times \frac{5^{2 \times 3}}{2 \times 3} = \frac{2^4}{5 \times (2^{10} \times 3^6)} \times \frac{-2^{-4}}{2^{-2} \times 5^{-3}} \times \frac{5^{2 \times 3}}{2 \times 3} = -2^{-9} \times 3^{-7} \times 5^8.$$

11.6 c) On a :

$$\frac{2^3}{5 \times (3^3 \times 2^5)^2} \times \frac{9 \times (2^{-3})^{-1}}{2^2 \times (-5^2)} \times \left(\frac{-5^{-1}}{2^{-2} \times 3^3}\right)^{-2} = \frac{2^3}{5 \times 3^6 \times 2^{10}} \times \frac{3^2 \times 2^3}{2^2 \times (-5^2)} \times \frac{5^2}{2^4 \times 3^{-6}} = -2^{-10} \times 3^2 \times 5^{-1}.$$

11.7 a) Le nombre recherché est $\frac{3^2 \times 5}{(3^{-1} \times 5)^{-1}} \times \frac{45^{-1}}{6^2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{3^2 \times 5}{3 \times 5^{-1}} \times \frac{3^{-2} \times 5^{-1}}{2^2 \times 3^2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{2 \times 3^4} = \frac{5}{162}$.

11.7 b) Le nombre recherché est $\frac{1}{3} \times \frac{5}{2^3} \times \left(\frac{1}{48}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2^3} \times \left(\frac{1}{2^4 \times 3}\right)^{-1} = 2 \times 5 = 10$.

11.7 c) Le nombre recherché est $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(5 \times \frac{12}{15}\right) \times \left(\frac{1}{5} \times (-3)^2\right)^{-1} = -\frac{3^3}{2^3} \times \left(5 \times \frac{2^2 \times 3}{3 \times 5}\right) \times 5 \times 3^{-2} = -\frac{15}{2}$.

11.8 a) On a $0,25 = 1/4 = 2^{-2}$.

11.8 b) On a $0,2 = 2/10 = 1/5 = 5^{-1}$.

11.8 d) On a $0,006 = \frac{6}{1000} = \frac{3}{500} = \frac{3}{5 \times 10^2} = \frac{3}{5 \times 2^2 \times 5^2} = 2^{-2} \times 3 \times 5^{-3}$.

11.8 e) On a $2,4 = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} = \frac{2^2 \times 3}{5} = 2^2 \times 3 \times 5^{-1}$.

11.8 f) On a $6,25 = \frac{625}{10^2} = \frac{5^4}{2^2 \times 5^2} = 2^{-2} \times 5^2$; la difficulté étant d'établir $625 = 5^4$. Peut-être est-il plus simple d'écrire $6,25 = 6 + 0,25 = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4} = \frac{5^2}{2^2} = 2^{-2} \times 5^2$?

Fiche n° 12. Application des puissances

Réponses

12.1 a).....	$\boxed{2}$	12.3 b).....	$\boxed{2^{26} \times 5^{26}}$	12.7 a).....	$\boxed{2^{-2}}$
12.1 b).....	$\boxed{0}$	12.3 c).....	$\boxed{2^6 \times 3^{12} \times 5^6}$	12.7 b).....	$\boxed{3^{-3}}$
12.1 c).....	$\boxed{79}$	12.3 d).....	$\boxed{2^{300} \times 5^{100} \times 7^{100}}$	12.7 c).....	$\boxed{(-2^{-1})^{-1}}$
12.1 d).....	$\boxed{33}$	12.3 e).....	$\boxed{2^{15} \times 3^5 \times 5^3 \times 7^8}$	12.7 d).....	$\boxed{\left(\frac{1}{3^{-2}}\right)^{-1}}$
12.1 e).....	$\boxed{63}$	12.3 f).....	$\boxed{2^{88} \times 3^2 \times 5 \times 11^{44}}$	12.7 e).....	$\boxed{-(6^{-2})}$
12.1 f).....	$\boxed{121}$	12.4 a).....	$\boxed{3 \times 2^{13}}$	12.7 f).....	$\boxed{\text{il y a égalité}}$
12.1 g).....	$\boxed{24}$	12.4 b).....	$\boxed{13 \times 3^{24}}$	12.8 a).....	$\boxed{c_0 = 2,99 \times 10^8}$
12.1 h).....	$\boxed{-41}$	12.4 c).....	$\boxed{-19 \times 5^{26}}$	12.8 b).....	$\boxed{\Delta\mu = 9,192 \times 10^9}$
12.2 a).....	$\boxed{a^{10} \times b^5}$	12.4 d).....	$\boxed{2^{63} \times 3 \times 5^{40}}$	12.8 c).....	$\boxed{h = 6,626 \times 10^{-34}}$
12.2 b).....	$\boxed{a^7 \times b^5}$	12.5 a).....	$\boxed{2^{40} \times 3^{14} \times 5}$	12.8 d).....	$\boxed{N_A = 6,02 \times 10^{23}}$
12.2 c).....	$\boxed{a^{18} \times b^3}$	12.5 b).....	$\boxed{4^9 \times 15 \text{ ou } 2^{18} \times 15}$	12.9.....	$\boxed{\textcircled{b}}$
12.2 d).....	$\boxed{a^8 \times b^{22}}$	12.6 a).....	$\boxed{\text{positif}}$		
12.2 e).....	$\boxed{a^{75} \times b^{30}}$	12.6 b).....	$\boxed{\text{négatif}}$		
12.2 f).....	$\boxed{a^{98} \times b^{168}}$	12.6 c).....	$\boxed{\text{positif}}$		
12.3 a).....	$\boxed{2^6 \times 3^2}$				

Corrigés

12.1 a) On a $-7 + 3^2 = -7 + 9 = 2$.

12.1 c) On a $-7^2 + 2 \times 4^3 = -49 + 2 \times 64 = -49 + 128 = 128 - 49 = 79$.

12.1 d) On a $5^2 - (-2)^3 = 25 - (-8) = 25 + 8 = 33$.

12.1 f) On a $1 - 5 - (-5)^3 = -4 - (-125) = -4 + 125 = 125 - 4 = 121$.

12.1 g) Grâce à une factorisation, on a $2^3 - 2^4 + 2^5 = 2^3 - 2^3 \times 2 + 2^3 \times 2^2 = 2^3 \times (1 - 2 + 2^2) = 8 \times 3 = 24$.

12.2 c) On a $(a \times a^2 \times a^3 + a^6 \times (b-1))^3 = (a^6 + a^6 \times (b-1))^3 = (a^6 \times b)^3 = a^{18} \times b^3$.

12.2 e) On a $((a^4 \times b)^3 \times b^3 \times a^3)^5 = (a^{12} \times b^3 \times b^3 \times a^3)^5 = (a^{15} \times b^6)^5 = a^{75} \times b^{30}$.

12.2 f) On a $((a \times b^2)^3)^4 \times a^2)^7 = ((a^3 \times b^6)^4 \times a^2)^7 = (a^{12} \times b^{24} \times a^2)^7 = (a^{14} \times b^{24})^7 = a^{98} \times b^{168}$.

12.3 a) On a $24 = 2^3 \times 3$, donc $24^2 = (2^3 \times 3)^2 = 2^{3 \times 2} \times 3^2 = 2^6 \times 3^2$.

12.3 e) On a $20^3 \times 56^3 \times 21^5 = (2^2 \times 5)^3 \times (2^3 \times 7)^3 \times (3 \times 7)^5 = (2^6 \times 5^3) \times (2^9 \times 7^3) \times (3^5 \times 7^5) = 2^{15} \times 3^5 \times 5^3 \times 7^8$.

12.3 f) On a $44^{44} + 44^{45} = 44^{44} + 44^{44} \times 44 = 44^{44}(1 + 44) = 44^{44} \times 45 = (2^2 \times 11)^{44} \times 3^2 \times 5 = 2^{88} \times 3^2 \times 5 \times 11^{44}$.

12.4 a) On a $2^{13} + 2^{14} = 2^{13} + 2^{13} \times 2 = 3 \times 2^{13}$.

12.4 b) On a :

$$\begin{aligned} 3^{25} + 27^8 + 9^{13} &= 3^{25} + (3^3)^8 + (3^2)^{13} = 3^{25} + 3^{24} + 3^{26} \\ &= 3^{24} \times 3 + 3^{24} + 3^{24} \times 3^2 = 3^{24} \times (3 + 1 + 3^2) = 13 \times 3^{24}. \end{aligned}$$

12.4 d) On a :

$$\begin{aligned} 20^{30} \times 5^{12} - 2^{40} \times 50^{20} &= (2^2 \times 5)^{30} \times 5^{12} - 2^{40} \times (2 \times 5^2)^{20} = 2^{60} \times 5^{42} - 2^{60} \times 5^{40} \\ &= 2^{60} \times 5^{40}(5^2 - 1) = 2^{63} \times 3 \times 5^{40}. \end{aligned}$$

12.5 a) On a :

$$\begin{aligned} 2^{17} \times 12^{14} - 32^8 \times 3^{17} &= 2^{17} \times (2^2 \times 3)^{14} - (2^5)^8 \times 3^{17} = 2^{45} \times 3^{14} - 2^{40} \times 3^{17} \\ &= 2^{40} \times 3^{14}(2^5 - 3^3) = 2^{40} \times 3^{14} \times 5. \end{aligned}$$

12.6 a) On a $-(-83,4)^{-1} = -\frac{1}{-83,4} = \frac{1}{83,4} > 0$.

12.6 b) On a $(-2)^{-1} + 0,2 = \frac{1}{(-2)^1} + 0,2 = -0,5 + 0,2 = -0,3 < 0$.

12.6 c) On a $-(-4)^{-1} + 0,4 = -\frac{1}{(-4)^1} + 0,4 = \frac{1}{4} + 0,4 = 0,25 + 0,4 = 0,65 > 0$.

12.7 c) On a $(-2^{-1})^{-1} = (-\frac{1}{2})^{-1} = -2$. De plus, $-2 < -1$.

12.7 d) On a $(\frac{1}{3^{-2}})^{-1} = 9^{-1} = \frac{1}{9}$. De plus, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

12.7 e) On a $(-6)^{-2} = \frac{1}{(-6)^2} = \frac{1}{36}$. On a $-(6^{-2}) = -(\frac{1}{6^2}) = -\frac{1}{36}$.

12.7 f) On a $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$. On a $-(2^{-1})^3 = -(\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$.

12.9 On a :

$$\begin{aligned} 0,1^3 \times (200)^4 \times (-0,01)^2 &= (10^{-1})^3 \times (2 \times 10^2)^4 \times (-10^{-2})^2 \\ &= 10^{-3} \times 16 \times 10^8 \times 10^{-4} \\ &= 16 \times 10 \\ &= 1,6 \times 10^2. \end{aligned}$$

Fiche n° 13. Bilan et approfondissement sur les puissances

Réponses

13.1 a)	$+$	13.5 c)	$25^6 \times 8^4$	13.10 c)	$\left(\frac{x}{4}\right)^2$
13.1 b)	$-$	13.5 d)	10^{-5}	13.10 d)	$\left(\frac{1}{3x}\right)^2$
13.1 c)	$+$	13.6 a)	2^4	13.11 a)	$a^{-1}b^2$
13.1 d)	$-$	13.6 b)	2^{-3}	13.11 b)	a^4b
13.2 a)	faux	13.6 c)	2^{-5}	13.11 c)	$a^{-1}b^6$
13.2 b)	vrai	13.6 d)	2^{36}	13.11 d)	$a^{13}b^{-15}$
13.2 c)	vrai	13.7 a)	2^{20}	13.12 a)	$a^{-2n-2}b^{-n+2}$
13.2 d)	faux	13.7 b)	21^2	13.12 b)	$a^{-n-1}b^0$
13.3 a)	vrai	13.7 c)	6^8	13.12 c)	$a^n b^{3n}$
13.3 b)	vrai	13.7 d)	$\left(\frac{5}{2}\right)^{11}$	13.12 d)	$a^{-4n+3}b^{n+2}$
13.3 c)	faux	13.8 a)	$2^5 \times 3^5 \times 5^{-1}$	13.13 a) ..	$a^{-4n-3}b^{2n-6}c^{-2n-1}$
13.3 d)	vrai	13.8 b)	$2^8 \times 3^1 \times 5^{12}$	13.13 b)	$a^{-n+5}b^{-n-5}c^{n+2}$
13.4 a)	$1,234\,567 \times 10^6$	13.8 c)	$2^{-7} \times 3^1 \times 5^1$	13.13 c)	$a^{2n+1}b^{5n+4}c^{-n}$
13.4 b)	$1,2 \times 10^{-3}$	13.9 a)	2^{n+3}	13.13 d)	$a^{-6n}b^{-n+3}c^{-2n+4}$
13.4 c)	$7,492\,5 \times 10^{-2}$	13.9 b)	5^{3n+5}	13.14	3^{11}
13.4 d)	1×10^{-7}	13.10 a)	$(6x^4)^2$	13.15	3^{-4}
13.5 a)	2^{46}	13.10 b)	x^2		

Corrigés

13.2 a) On a $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \neq -16$.

13.2 c) On a $5^9 + 5^9 + 5^9 + 5^9 + 5^9 = 5 \times 5^9 = 5^1 \times 5^9 = 5^{10}$.

13.2 d) On a $\frac{5^4}{5^{-3}} = 5^{4-(-3)} = 5^{4+3} = 5^7$.

13.3 a) On a $2^{n+1} - 2^n = 2^n \times 2^1 - 2^n = 2^n(2^1 - 1) = 2^n \times 1 = 2^n$.

13.3 b) On a $2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$.

13.3 c) On a $(a^b)^n = a^{b \times n} \neq a^{b^n}$.

13.5 a) On a $8^{15} = (2^3)^{15} = 2^{45} < 2^{46}$.

13.5 b) On a $27^{-15} = (3^3)^{-15} = 3^{-45} = \frac{1}{3^{45}} < \frac{1}{3^{44}}$. D'où $27^{-15} < 3^{-44}$.

13.5 c) On a $25^6 \times 8^4 = (5^2)^6 \times (2^3)^4 = 5^{12} \times 2^{12} = (5 \times 2)^{12} = 10^{12} > 10^9$.

13.5 d) On a $4^{-3} \times 125^{-2} = (2^2)^{-3} \times (5^3)^{-2} = 2^{-6} \times 5^{-6} = (2 \times 5)^{-6} = 10^{-6} < 10^{-5}$.

13.6 a) On a $\frac{8 \times 2^7}{4^3} = \frac{2^3 \times 2^7}{(2^2)^3} = \frac{2^{10}}{2^6} = 2^4$.

13.6 b) On a $128^3 \times (16^3)^{-2} = (2^7)^3 \times 16^{-6} = 2^{21} \times (2^4)^{-6} = 2^{21} \times 2^{-24} = 2^{-3}$.

13.6 c) On a $\frac{4^{-3} \times 16^3}{(2^{-1})^4 \times 8^5} = \frac{(2^2)^{-3} \times (2^4)^3}{2^{-4} \times (2^3)^5} = \frac{2^{-6} \times 2^{12}}{2^{-4} \times 2^{15}} = \frac{2^6}{2^{11}} = 2^{-5}$.

13.6 d) On a $\frac{-4^5 \times (-4)^7}{(4^3)^{-2}} = \frac{-4^5 \times (-4)^7}{4^{-6}} = \frac{4^{12}}{4^{-6}} = 4^{18} = (2^2)^{18} = 2^{36}$.

13.7 a) On a $\frac{10^2 \times (4^3)^3}{25} = \frac{(2 \times 5)^2 \times 4^9}{5^2} = \frac{2^2 \times 5^2 \times (2^2)^9}{5^2} = 2^2 \times 2^{18} = 2^{20}$.

13.7 b) On a :

$$\begin{aligned} \frac{7 \times 2^9 \times 21^6}{14^5 \times 6^4} &= \frac{7 \times 2^9 \times (7 \times 3)^6}{(2 \times 7)^5 \times (2 \times 3)^4} = \frac{7 \times 2^9 \times 7^6 \times 3^6}{2^5 \times 7^5 \times 2^4 \times 3^4} \\ &= \frac{7^7 \times 2^9 \times 3^6}{2^9 \times 7^5 \times 3^4} = 7^2 \times 3^2 = (7 \times 3)^2 = 21^2. \end{aligned}$$

13.7 c) On a $\frac{9^4 \times 4^7}{2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4} = \frac{(3^2)^4 \times (2^2)^7}{4 \times 2^4} = \frac{3^8 \times 2^{14}}{2^2 \times 2^4} = \frac{3^8 \times 2^{14}}{2^6} = 3^8 \times 2^8 = (3 \times 2)^8 = 6^8$.

13.7 d) On a $\frac{25^8 \times (\frac{1}{2-3})^{-2}}{10^5} = \frac{(5^2)^8 \times (2^3)^{-2}}{(2 \times 5)^5} = \frac{5^{16} \times 2^{-6}}{2^5 \times 5^5} = \frac{5^{11}}{2^{11}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{11}$.

13.8 a) On a $\frac{5^2 \times 10^{-3} \times 6^4}{4^{-2} \times 3^{-1}} = \frac{5^2 \times (5 \times 2)^{-3} \times (2 \times 3)^4}{(2^2)^{-2} \times 3^{-1}} = \frac{5^2 \times 5^{-3} \times 2^{-3} \times 2^4 \times 3^4}{2^{-4} \times 3^{-1}} = 2^5 \times 3^5 \times 5^{-1}$.

13.8 b) On a $\frac{(-3)^{-4} \times 25^7 \times (-18)^2}{15^2 \times 12^{-3}} = \frac{3^{-4} \times (5^2)^7 \times (3^2 \times 2)^2}{(3 \times 5)^2 \times (2^2 \times 3)^{-3}} = \frac{3^{-4} \times 5^{14} \times 3^4 \times 2^2}{3^2 \times 5^2 \times 2^{-6} \times 3^{-3}} = 2^8 \times 3^1 \times 5^{12}$.

13.8 c) On a :

$$\begin{aligned} \frac{(2^5)^{-3}}{\frac{3^{-5} \times 5^7}{10^8}} \times 9^{-2} &= \frac{2^{-15}}{\frac{3^{-5} \times 5^7}{(2 \times 5)^8}} \times (3^2)^{-2} = \frac{2^{-15}}{\frac{3^{-5} \times 5^7}{2^8 \times 5^8}} \times 3^{-4} \\ &= \frac{2^{-15}}{3^{-5} \times 5^{-1} \times 2^{-8}} \times 3^{-4} = 2^{-7} \times 3^1 \times 5^1. \end{aligned}$$

13.9 b) On a $\frac{(-5)^{2n} \times 25^3 \times 16^n}{20^{2n} \times 5^{1-3n}} = \frac{5^{2n} \times (5^2)^3 \times (2^4)^n}{((2^2) \times 5)^{2n} \times 5^{1-3n}} = \frac{5^{2n+6} \times 2^{4n}}{2^{4n} \times 5^{2n} \times 5^{1-3n}} = \frac{5^{2n+6}}{5^{1-n}} = 5^{3n+5}$.

13.10 b) On a $\frac{8x^5}{x^{-3} \times (2x^2)^3} = \frac{8x^5}{x^{-3} \times 2^3 \times (x^2)^3} = \frac{2^3 \times x^5}{x^{-3} \times 2^3 \times x^6} = \frac{x^5}{x^3} = x^2$.

13.10 c) On a $(-2x)^{-4} \times x^6 = (-2)^{-4} \times x^{-4} \times x^6 = 2^{-4} \times x^2 = \frac{x^2}{2^4} = \left(\frac{x}{2^2}\right)^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$.

$$\text{13.10 d) On a } \frac{(9x^3)^{-1} \times x^4}{x^3} = \frac{9^{-1} \times (x^3)^{-1} \times x^4}{x^3} = \frac{9^{-1} \times x^{-3} \times x^4}{x^3} = \frac{9^{-1} \times x}{x^3} = \frac{9^{-1}}{x^2} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{3x}\right)^2.$$

$$\text{13.11 a) On a } \left(\frac{a^3}{b^{-5}}\right)^{-1} \times a^2 b^7 = \frac{(a^3)^{-1}}{(b^{-5})^{-1}} \times a^2 b^7 = \frac{a^{-3}}{b^5} \times a^2 b^7 = a^{-1} b^2.$$

$$\text{13.11 b) On a } \frac{(a^2 b)^3 \times b^{-4}}{(a^{-2} \times b^2)^{-1}} = \frac{(a^2)^3 \times b^3 \times b^{-4}}{(a^{-2})^{-1} \times (b^2)^{-1}} = \frac{a^6 \times b^{-1}}{a^2 \times b^{-2}} = a^4 b.$$

$$\text{13.11 c) On a } \frac{(b^3 a)^3 \times b^{-5}}{(a^2 b^{-1})^2} = \frac{(b^3)^3 \times a^3 \times b^{-5}}{(a^2)^2 \times (b^{-1})^2} = \frac{b^9 \times a^3 \times b^{-5}}{a^4 \times b^{-2}} = \frac{b^4 \times a^3}{a^4 \times b^{-2}} = a^{-1} b^6.$$

13.11 d) On a :

$$\begin{aligned} \frac{a^2 b^{-1}}{(a^3)^{-4} \times \frac{(ab^5)^3}{ba^2}} &= \frac{a^2 b^{-1}}{a^{-12} \times \frac{a^3 \times (b^5)^3}{ba^2}} = \frac{a^2 b^{-1}}{a^{-12} \times \frac{a^3 \times b^{15}}{ba^2}} \\ &= \frac{a^2 b^{-1}}{a^{-12} \times a \times b^{14}} = \frac{a^2 b^{-1}}{a^{-11} \times b^{14}} = a^{13} b^{-15}. \end{aligned}$$

$$\text{13.12 a) On a } \frac{(a^{2n})^{-1} \times b^{n+2}}{(ab^n)^2} = \frac{a^{-2n} \times b^{n+2}}{a^2 \times (b^n)^2} = a^{-2n-2} b^{-n+2}.$$

$$\text{13.12 b) On a } \frac{ab \times (a^3 b^2)^n}{(a^2 b)^{2n+1}} = \frac{ab \times (a^3)^n \times (b^2)^n}{(a^2)^{2n+1} \times b^{2n+1}} = \frac{ab \times a^{3n} \times b^{2n}}{a^{4n+2} \times b^{2n+1}} = \frac{a^{3n+1} \times b^{2n+1}}{a^{4n+2} \times b^{2n+1}} = a^{-n-1} b^0.$$

$$\text{13.12 c) On a } \frac{(ab^{n+1})^2 \times a^{2n}}{a^{n+2} \times \frac{1}{b^{n-2}}} = \frac{a^2 \times (b^{n+1})^2 \times a^{2n}}{a^{n+2} \times b^{-n+2}} = \frac{a^{2n+2} \times b^{2n+2}}{a^{n+2} \times b^{-n+2}} = a^n b^{3n}.$$

$$\text{13.12 d) On a } \frac{a^{1-n} b^{2n}}{b^n \times \frac{1}{\frac{ab^2}{a^{3n-1}}}} = \frac{a^{1-n} b^{2n}}{b^n \times \frac{1}{a^{1-(3n-1)} b^2}} = \frac{a^{1-n} b^{2n}}{b^n \times \frac{1}{a^{2-3n} b^2}} = \frac{a^{1-n} b^{2n}}{b^{n-2} \times a^{-2+3n}} = a^{-4n+3} b^{n+2}.$$

$$\text{13.13 a) On a } \frac{(a^{n+3} b^{2-n} c)^{-1} \times a^{1-3n}}{ab^{4-n} c^{2n}} = \frac{a^{-n-3} b^{-2+n} c^{-1} a^{1-3n}}{ab^{4-n} c^{2n}} = a^{-4n-3} b^{2n-6} c^{-2n-1}.$$

$$\text{13.13 b) On a } (a^2 b^{n-3} c)^2 \times \frac{b^{1-3n}}{c^{-n} a^{n-1}} = a^4 b^{2n-6} c^2 b^{1-3n} c^n a^{-n+1} = a^{-n+5} b^{-n-5} c^{n+2}.$$

13.13 c) On a :

$$\begin{aligned} \frac{a^n b c^{1-n} \times (ab^n)^2}{a^{4-n} \times \frac{c}{(ab^{n+1})^3}} &= \frac{a^n b c^{1-n} \times a^2 b^{2n}}{a^{4-n} \times \frac{c}{a^3 b^{3n+3}}} = \frac{a^{n+2} b^{2n+1} c^{1-n}}{a^{4-n} \times c a^{-3} b^{-3n-3}} \\ &= \frac{a^{n+2} b^{2n+1} c^{1-n}}{a^{-n+1} b^{-3n-3} c} = a^{2n+1} b^{5n+4} c^{-n}. \end{aligned}$$

13.13 d) On a :

$$\begin{aligned} \frac{((a^2)^n)^{-1} \times c^{3-n}}{\frac{b^n c^{-1}}{a^{1-4n} \times \frac{b^3}{ac^n}}} &= \frac{((a^{2n})^{-1} \times c^{3-n})}{\frac{b^n c^{-1}}{a^{1-4n} \times b^3 \times a^{-1} \times c^{-n}}} = \frac{a^{-2n} c^{3-n}}{\frac{b^n c^{-1}}{a^{-4n} b^3 c^{-n}}} \\ &= \frac{a^{-2n} c^{3-n}}{a^{4n} b^{n-3} c^{n-1}} = a^{-6n} b^{-n+3} c^{-2n+4}. \end{aligned}$$

$$\text{13.14 On a } \frac{(3^3 + 3^3 + 3^3)(6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6)}{2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5} = \frac{(3 \times 3^3)(6 \times 6^6)}{4 \times 2^5} = \frac{3^4 \times 6^7}{2^7} = 3^4 \times 3^7 = 3^{10}.$$

$$\text{13.15 On a } \left(\frac{9^{2n} - 5 \times 9^{2n-1}}{3^{4n+1} + 3^{4n}}\right)^2 = \left(\frac{9^{2n-1}(9-5)}{3^{4n}(3+1)}\right)^2 = \left(\frac{9^{2n-1} \times 4}{3^{4n} \times 4}\right)^2 = \left(\frac{3^{4n-2}}{3^{4n}}\right)^2 = (3^{-2})^2 = 3^{-4}.$$

Fiche n° 14. Calculs avec des racines I

Réponses

14.1	d	14.4 b)	70	14.7 a)	1 < \sqrt{2} < 2
14.2 a)	non	14.4 c)	5	14.7 b)	12 < \sqrt{150} < 13
14.2 b)	oui	14.4 d)	2	14.7 c)	7 < \sqrt{58} < 8
14.2 c)	oui	14.5 a)	100	14.7 d)	9 < \sqrt{91} < 10
14.2 d)	oui	14.5 b)	0,1	14.7 e)	3 < 2\sqrt{3} < 4
14.2 e)	non	14.5 c)	0,6	14.7 f)	-5 < -3\sqrt{2} < -4
14.2 f)	oui	14.5 d)	0,03	14.8 a)	-53 + 11\sqrt{3}
14.3 a)	3	14.6 a)	400	14.8 b)	22 + 13\sqrt{13}
14.3 b)	2	14.6 b)	3	14.9 a)	23 - 5\sqrt{7}
14.3 c)	25	14.6 c)	-104	14.9 b)	-7
14.3 d)	9	14.6 d)	-30	14.9 c)	59 - 30\sqrt{2}
14.3 e)	\sqrt{3} - 1	14.6 e)	12	14.9 d)	252 - 48\sqrt{5}
14.3 f)	\sqrt{2} - 1	14.6 f)	5/7		
14.4 a)	-6				

Corrigés

14.1 On a $\sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$.

Même si on a bien $(-8)^2 = 64$, la réponse -8 n'est pas correcte car la racine carrée d'un nombre est toujours un nombre positif ou nul.

14.3 b) On a $\sqrt{1 + \sqrt{1}} = \sqrt{2} = 2$.

14.3 c) On a $\sqrt{5^4} = \sqrt{(5^2)^2} = 5^2 = 25$.

14.3 d) On a $\sqrt{(-3)^4} = \sqrt{(3^2)^2} = 9$.

14.3 e) On a $3 > 1$, donc $\sqrt{3} > \sqrt{1}$ et donc $\sqrt{3} > 1$; donc $\sqrt{3} - 1 > 0$. Ainsi, on a $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1$.

14.3 f) De même, on a $\sqrt{2} > 1$, donc $1 - \sqrt{2} < 0$. On en déduit que $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{2} - 1$.

14.4 a) On a $\frac{30}{\sqrt{25} - \sqrt{100}} = \frac{30}{5 - 10} = \frac{30}{-5} = -6$.

14.4 b) On a $\sqrt{49} \times \sqrt{100} = 7 \times 10 = 70$.

14.4 c) On a $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

14.4 d) On a $\sqrt{\sqrt{12} + 4} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$.

14.5 a) On a $\sqrt{10^4} = \sqrt{(10^2)^2} = 10^2 = 100$.

14.5 b) On a $\sqrt{0,01} = \sqrt{(10^{-1})^2} = 10^{-1} = 0,1$.

14.5 d) On a $\sqrt{0,0009} = \sqrt{9 \times 10^{-4}} = \sqrt{(3 \times 10^{-2})^2} = 3 \times 10^{-2} = 0,03$.

14.6 a) On a $(-5\sqrt{16})^2 = (-5)^2 \times 16 = 400$.

14.6 b) On a $\sqrt{\sqrt{3}^4} = \sqrt{3^2} = 3$.

14.6 c) On a $-2\sqrt{3} \times 9\sqrt{3} + 5\sqrt{5} \times (-2\sqrt{5}) = -18 \times 3 - 10 \times 5 = -104$.

14.6 d) On a $-\sqrt{15} \times \sqrt{6} \times \sqrt{10} = -\sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} = -2 \times 3 \times 5 = -30$.

14.6 e) On a $\sqrt{2^4 \times 3^2} = \sqrt{(2^2 \times 3)^2} = 12$.

14.7 b) On a $12^2 = 144$ et $13^2 = 169$ donc $12 < \sqrt{150} < 13$.

14.7 c) On a $49 < 58 < 64$, donc $\sqrt{49} < \sqrt{58} < \sqrt{64}$, c'est-à-dire $7 < \sqrt{58} < 8$.

14.7 e) On a $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$. Or, $9 < 12 < 16$ donc $3 < 2\sqrt{3} < 4$.

14.7 f) On a $(-3\sqrt{2})^2 = 18$ et $16 < 18 < 25$. D'où $4 < \sqrt{18} < 5$ et donc $-5 < -3\sqrt{2} < -4$.

14.8 a) On a $1 - \sqrt{3} - 6\sqrt{3}(-2 + 3\sqrt{3}) = 1 - \sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 18 \times \sqrt{3}^2 = -53 + 11\sqrt{3}$.

14.8 b) On a $-4 + 20\sqrt{13} + \sqrt{13}(-7 + 2\sqrt{13}) = -4 + 20\sqrt{13} - 7\sqrt{13} + 2\sqrt{13}^2 = 13\sqrt{13} + 22$.

14.9 a) On a $(-2 + 3\sqrt{7})(\sqrt{7} - 1) = -2\sqrt{7} + 3 \times 7 + 2 - 3\sqrt{7} = 23 - 5\sqrt{7}$.

14.9 c) On a $(-5\sqrt{2} + 3)^2 = (-5\sqrt{2})^2 - 2 \times 5\sqrt{2} \times 3 + 3^2 = 25 \times 2 - 30\sqrt{2} + 9 = 59 - 30\sqrt{2}$.

14.9 d) On a $\frac{4}{3}(-3 + 6\sqrt{5})^2 = \frac{4}{3}(9 - 36\sqrt{5} + 36 \times 5) = \frac{4}{3}(189 - 36\sqrt{5}) = 252 - 48\sqrt{5}$.

Fiche n° 15. Calculs avec des racines II

Réponses

15.1 a).....	$\boxed{6}$	15.2 i).....	$\boxed{4\sqrt{5}}$	15.7 a).....	$\boxed{\frac{-5\sqrt{7}}{7}}$
15.1 b).....	$\boxed{-80}$	15.3 a).....	$\boxed{\sqrt{2}}$	15.7 b).....	$\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}}$
15.1 c).....	$\boxed{-40}$	15.3 b).....	$\boxed{-\sqrt{5}}$	15.7 c).....	$\boxed{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$
15.1 d).....	$\boxed{2\sqrt{5}}$	15.3 c).....	$\boxed{-13 + 13\sqrt{3}}$	15.7 d).....	$\boxed{\frac{2}{5}\sqrt{35}}$
15.1 e).....	$\boxed{\sqrt{3}}$	15.3 d).....	$\boxed{-32\sqrt{7}}$	15.7 e).....	$\boxed{\frac{49\sqrt{5} - 25\sqrt{7}}{35}}$
15.1 f).....	$\boxed{-8\sqrt{2}}$	15.4 a).....	$\boxed{31 - 5\sqrt{5}}$	15.7 f).....	$\boxed{\frac{-25\sqrt{3} + 9\sqrt{5}}{30}}$
15.2 a).....	$\boxed{2\sqrt{3}}$	15.4 b).....	$\boxed{116 + 3\sqrt{7}}$	15.8 a).....	$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{5}}$
15.2 b).....	$\boxed{2\sqrt{7}}$	15.4 c)...	$\boxed{6 - 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{6}}$	15.8 b).....	$\boxed{-\frac{6\sqrt{7}}{7}}$
15.2 c).....	$\boxed{100}$	15.4 d).....	$\boxed{\begin{matrix} -8 + 20\sqrt{2} \\ -10\sqrt{3} + 2\sqrt{6} \end{matrix}}$	15.8 c)...	$\boxed{\frac{3 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{3}}$
15.2 d).....	$\boxed{2\sqrt{15}}$	15.5 a).....	$\boxed{-2 + 5\sqrt{2}}$		
15.2 e).....	$\boxed{2\sqrt{13}}$	15.5 b).....	$\boxed{6 + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}$		
15.2 f).....	$\boxed{10\sqrt{2}}$	15.6 a).....	$\boxed{1 + 3\sqrt{2} - \sqrt{3}}$		
15.2 g).....	$\boxed{5\sqrt{3}}$	15.6 b)...	$\boxed{-27 + 24\sqrt{6} - 8\sqrt{15}}$		
15.2 h).....	$\boxed{5\sqrt{6}}$				

Corrigés

15.1 b) On a $2\sqrt{2} \times (-5\sqrt{32}) = -2 \times \sqrt{2} \times 5\sqrt{16} \times \sqrt{2} = -2 \times 5 \times 4 \times \sqrt{2^2} = -80$.

15.1 c) On a $-\sqrt{40} \times 2\sqrt{5^2 - 15} = -\sqrt{4} \times \sqrt{10} \times 2 \times \sqrt{10} = -40$.

15.1 f) On a $\frac{-4\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \times \sqrt{\frac{20}{3}} = -\frac{4\sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{3}} = -8\sqrt{2}$.

15.2 e) On a $\sqrt{52} = \sqrt{4} \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$.

15.2 h) On a $\sqrt{150} = \sqrt{25} \times \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$.

15.3 b) On a $\sqrt{80} - 4\sqrt{125} + 9\sqrt{20} - \sqrt{45} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} - 4\sqrt{25} \times \sqrt{5} + 9 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} - \sqrt{9} \times \sqrt{5} = -\sqrt{5}$.

15.3 c) On a $\sqrt{27} + 5 + 2\sqrt{75} - 2\sqrt{81} = 3\sqrt{3} + 5 + 2 \times 5 \times \sqrt{3} - 2 \times 9 = -13 + 13\sqrt{3}$.

15.4 a) On a $(1 - 3\sqrt{5})(1 - 2\sqrt{5}) = 1 - 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 6 \times 5 = 31 - 5\sqrt{5}$.

15.4 b) On a $(3\sqrt{7} - 2)(5 + 6\sqrt{7}) = 15\sqrt{7} + 18 \times 7 - 10 - 12\sqrt{7} = 116 + 3\sqrt{7}$.

15.4 c) On a $(-\sqrt{2} + \sqrt{3})(5 - 3\sqrt{2}) = -5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} + 3 \times 2 - 3\sqrt{6} = 6 - 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{6}$.

15.4 d) On a :

$$\begin{aligned} (-2\sqrt{8} + \sqrt{12})(\sqrt{2} - 5) &= -2 \times 2 \times \sqrt{2}^2 + 10 \times 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} - 5 \times 2\sqrt{3} \\ &= -8 + 20\sqrt{2} - 10\sqrt{3} + 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

15.5 a) On a :

$$\begin{aligned} (-1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 2)(-\sqrt{2} + 5) &= (-\sqrt{2} - 2 + 2 + 2\sqrt{2})(-\sqrt{2} + 5) \\ &= \sqrt{2}(-\sqrt{2} + 5) = -2 + 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

15.5 b) On a :

$$\begin{aligned} (-1 + \sqrt{5})(2\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} + \sqrt{5}) &= (-2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \\ &= -2 \times 2 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{5} + 2 \times 2\sqrt{5} + 2 \times 5\sqrt{2} + 2\sqrt{10} + 2 \times 5 \\ &= 6 + 8\sqrt{2} + 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

15.6 a) On a :

$$\begin{aligned} (\sqrt{1} + \sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) &= \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + 2 + \sqrt{6} + 2\sqrt{2} - \sqrt{6} - 3 - 2\sqrt{3} \\ &= 1 + 3\sqrt{2} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

15.6 b) On a :

$$\begin{aligned} (-4\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{5})(4\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2\sqrt{5}) &= -16 \times 2 + 4\sqrt{6} + 8\sqrt{10} + 20\sqrt{6} - 15 - 10\sqrt{15} - 8\sqrt{10} + 2\sqrt{15} + 20 \\ &= -27 + 24\sqrt{6} - 8\sqrt{15}. \end{aligned}$$

15.7 a) On a $\frac{-5}{\sqrt{7}} = \frac{-5\sqrt{7}}{\sqrt{7}^2} = \frac{-5\sqrt{7}}{7}$.

15.7 b) On a $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

15.7 c) On a $\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{18}} = \frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

15.7 d) On a :

$$\frac{\sqrt{12} \times \sqrt{7}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{7}}{\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{7} \times \sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{35}.$$

15.7 f) On a $\frac{3}{2\sqrt{5}} - \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{9\sqrt{5} - 25\sqrt{3}}{30}$.

15.8 b) On calcule $\frac{\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{-\sqrt{7}} = \frac{3 \times 2}{-\sqrt{7}} = \frac{-6\sqrt{7}}{7}$.

15.8 c) On calcule :

$$\frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - 2 - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{-\sqrt{3}} = \frac{3 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{3}.$$

Fiche n° 16. Méthode de la quantité conjuguée

Réponses

16.1 a) $\boxed{-1}$	16.3 c) $\boxed{4 - 2\sqrt{2}}$	16.6 c) $\boxed{-9 + 5\sqrt{3}}$
16.1 b) $\boxed{-1 - \sqrt{2}}$	16.3 d) $\boxed{\frac{9 - 4\sqrt{2}}{7}}$	16.6 d) $\boxed{4(2 + \sqrt{2})}$
16.2 a) $\boxed{\frac{\sqrt{7} - 2}{3}}$	16.4 a) $\boxed{4(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$	16.6 e) $\boxed{2(a + 1)^3(1 - \sqrt{2})}$
16.2 b) $\boxed{-\frac{4 + \sqrt{2}}{14}}$	16.4 b) $\boxed{\sqrt{17} + 2\sqrt{3}}$	16.6 f) ... $\boxed{ab(a + b)(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$
16.2 c) $\boxed{5(2 - \sqrt{3})}$	16.4 c) $\boxed{-2(3\sqrt{2} - \sqrt{15})}$	16.7 a) $\boxed{\frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$
16.2 d) $\boxed{\frac{4(2 - \sqrt{11})}{7}}$	16.4 d) $\boxed{1}$	16.7 b) $\boxed{\frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}$
16.3 a) $\boxed{\frac{3\sqrt{2} - 2}{7}}$	16.5 a) ... $\boxed{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}}$	16.8 a) $\boxed{\frac{8 - 3\sqrt{2}}{4}}$
16.3 b) $\boxed{\frac{5 + \sqrt{5}}{4}}$	16.6 a) $\boxed{6(1 - \sqrt{3})}$	16.8 b) $\boxed{\frac{6 - 2\sqrt{2}}{7}}$
	16.6 b) $\boxed{150(2 + \sqrt{3})}$	

Corrigés

16.1 b) On a $\frac{1}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{1 + \sqrt{2}}{-1} = -1 - \sqrt{2}$.

16.2 a) On a $\frac{1}{2 + \sqrt{7}} = \frac{2 - \sqrt{7}}{(2 + \sqrt{7})(2 - \sqrt{7})} = \frac{2 - \sqrt{7}}{2^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{2 - \sqrt{7}}{4 - 7} = \frac{2 - \sqrt{7}}{-3} = \frac{\sqrt{7} - 2}{3}$.

16.2 b) On a $\frac{1}{-4 + \sqrt{2}} = \frac{-4 - \sqrt{2}}{(-4 + \sqrt{2})(-4 - \sqrt{2})} = -\frac{4 + \sqrt{2}}{4^2 - \sqrt{2}^2} = -\frac{4 + \sqrt{2}}{14}$.

16.3 a) On a $\frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(3 - \sqrt{2})}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{3^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{9 - 2} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{7}$.

16.3 c) On a $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} = 4 - 2\sqrt{2}$.

16.3 d) On a $\frac{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{2} + \frac{1}{2}} = \frac{(\sqrt{2} - \frac{1}{2})^2}{(\sqrt{2} + \frac{1}{2})(\sqrt{2} - \frac{1}{2})} = \frac{2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{2} - \sqrt{2}}{\frac{7}{4}} = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{7}$.

16.4 a) On a $\frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{4(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{4(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 4(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

16.4 b) On a $\frac{5}{\sqrt{17} - 2\sqrt{3}} = \frac{5(\sqrt{17} + 2\sqrt{3})}{\sqrt{17}^2 - (2\sqrt{3})^2} = \frac{5(\sqrt{17} + 2\sqrt{3})}{17 - 4 \times 3} = \frac{5(\sqrt{17} + 2\sqrt{3})}{5} = \sqrt{17} + 2\sqrt{3}$.

16.4 d) On a $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{3})}{12-3} = \frac{\sqrt{36}+3}{9} = \frac{9}{9} = 1$.

16.5 a) On a :

$$\frac{2(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})} = \frac{2(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{x^2+1-x^2+1} = \frac{2(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{2} = \sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}.$$

16.5 b) On a $\frac{\sqrt{x}}{8x\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}(8x\sqrt{x}+3)}{64x^3-9} = \frac{8x^2+3\sqrt{x}}{64x^3-9}$.

16.6 a) On calcule $\frac{\frac{3}{1+\sqrt{3}} \times \frac{2}{1-\sqrt{3}}}{\frac{1+\sqrt{3}}{4}} = \frac{24}{(1-3)(1+\sqrt{3})} = \frac{-12}{1+\sqrt{3}} = \frac{-12(1-\sqrt{3})}{-2} = 6(1-\sqrt{3})$.

16.6 b) On calcule :

$$\frac{\frac{3}{2-\sqrt{3}} \times \frac{10}{2+\sqrt{3}}}{\frac{2-\sqrt{3}}{5}} = \frac{3 \times 10 \times 5}{(4-3)(2-\sqrt{3})} = \frac{150}{2-\sqrt{3}} = \frac{150(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{150(2+\sqrt{3})}{2^2-\sqrt{3}^2} = 150(2+\sqrt{3}).$$

16.6 c) On calcule $\frac{(2\sqrt{a}+a)(a-\sqrt{4a})}{-a\sqrt{a}} = -\frac{2a\sqrt{a}-4a+a^2-2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a}-a\sqrt{a}}{a}$.

16.6 e) On calcule $\frac{\frac{2(a+1)}{1+\sqrt{2}} \times \frac{a+1}{1-\sqrt{2}}}{\frac{1+\sqrt{2}}{a+1}} = \frac{-2(a+1)^3}{1+\sqrt{2}} = \frac{-2(a+1)^3(1-\sqrt{2})}{1^2-\sqrt{2}^2} = 2(a+1)^3(1-\sqrt{2})$.

16.7 a) On a $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4} = \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

16.7 b) On a $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

16.8 a) Effectuons ce calcul petit à petit. Déjà, on a $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$. Ainsi, on a :

$$\frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{2+\sqrt{2}} = \frac{4(2-\sqrt{2})}{2} = 2(2-\sqrt{2}).$$

On a alors $\frac{3}{4-\frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{3}{4-2(2-\sqrt{2})} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. On conclut alors que :

$$2 - \frac{3}{4-\frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}} = 2 - \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{8-3\sqrt{2}}{4}.$$

Fiche n° 17. Bilan et approfondissement sur les racines carrées

Réponses

17.1 a)	7	17.9 b)	a^4
17.1 b)	5	17.9 c)	$-\frac{3}{2}a^{-5}$
17.2 a)	1	17.9 d)	$16a^4\sqrt{a}$
17.2 b)	$\frac{8}{3}$	17.10	a^4
17.3 a)	$95 + 30\sqrt{10}$	17.11 a)	$3a$
17.3 b)	$514 - 56\sqrt{15}$	17.11 b)	$a^2 - 1$
17.3 c)	5	17.11 c)	$\sqrt{2a - 1}$
17.3 d)	$81 - 56\sqrt{2}$	17.11 d)	$\sqrt{a^4 + 4}$
17.4	$16 + 4\sqrt{6} - 4\sqrt{10} - 2\sqrt{15}$	17.12 a)	$2(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$
17.5 a)	$2^{n-2} \times 5^{n+3}$	17.12 b)	$-3(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})$
17.5 b)	$\frac{2^{4n}}{5^{2n+1}}$	17.12 c)	$\frac{1}{3}(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$
17.5 c)	3^{6n-2}	17.12 d)	$(x + 1 - \sqrt{6})(x + 1 + \sqrt{6})$
17.5 d)	$2^{-3n+4} \times 5^{-n-3}$	17.12 e)	$2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$
17.6 a)	$\frac{\sqrt{15} - 7\sqrt{3}}{3}$	17.12 f)	$(3x + 2 - \sqrt{5}) \times (3x + 2 + \sqrt{5})$ $\times (9x^2 + 12x + 9)$
17.6 b)	$\frac{10\sqrt{3} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{15}}{15}$	17.13 a)	$\frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}$
17.6 c)	$3 - 2\sqrt{2}$	17.13 b)	$\sqrt{x^2 + 1} + x$
17.6 d)	$\frac{65 + 3\sqrt{2} + 21\sqrt{3}}{7}$	17.13 c)	$\frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{x}$
17.7	0	17.13 d)	$\frac{\sqrt{x^2 + 4} + 2}{x^2}$
17.8 a)	$\frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}$	17.14 a)	$\frac{(4 - a)\sqrt{a}}{a}$
17.8 b)	$\varphi^2 = 1 + \varphi$	17.14 b)	$-a^{-2n}$
17.8 c)	φ	17.15	$\frac{-6\sqrt{a} + 9}{a - 9}$
17.8 d)	$1 + 2\varphi$	17.16 a)	non
17.8 e)	$8 + 13\varphi$		
17.9 a)	a^6		

17.16 b)..... non

17.17 a)..... $(-1, 2)$

17.17 b)..... $-1 + 2\sqrt{3}$

17.17 c)..... $1 + 2\sqrt{3}$

17.17 d)..... $\frac{1}{11} + \frac{24}{121}\sqrt{3}$

17.18 a)..... $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

17.18 b)..... $\sqrt{n+1} - 1$

Corrigés

17.3 a) On a $(3\sqrt{5} + 5\sqrt{2})^2 = 9 \times 5 + 2 \times 15\sqrt{10} + 25 \times 2 = 95 + 30\sqrt{10}$.

17.3 b) On a $(2\sqrt{6} - 7\sqrt{10})^2 = 4 \times 6 - 28\sqrt{60} + 49 \times 10 = 514 - 28 \times 2\sqrt{15} = 514 - 56\sqrt{15}$.

17.3 c) On a $(3\sqrt{6} - 7)(3\sqrt{6} + 7) = 9 \times 6 - 7^2 = 54 - 49 = 5$.

17.3 d) On a :

$$\begin{aligned} (-1 + 3\sqrt{2})^2 (\sqrt{2} - 1)^2 &= (1 - 6\sqrt{2} + 18) \times (2 - 2\sqrt{2} + 1) = (19 - 6\sqrt{2}) \times (3 - 2\sqrt{2}) \\ &= 57 - 38\sqrt{2} - 18\sqrt{2} + 12 \times 2 = 81 - 56\sqrt{2}. \end{aligned}$$

17.4 On a $(2\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})^2 = 3 + 8 + 5 + 4\sqrt{6} - 2\sqrt{15} - 4\sqrt{10} = 16 + 4\sqrt{6} - 4\sqrt{10} - 2\sqrt{15}$.

17.5 a) On a $\sqrt{2^{2n-4} \times 5^{2n+6}} = \sqrt{(2^{n-2} \times 5^{n+3})^2} = 2^{n-2} \times 5^{n+3}$.

17.5 b) On a $\sqrt{\frac{2^{8n}}{5^{4n+2}}} = \sqrt{\left(\frac{2^{4n}}{5^{2n+1}}\right)^2} = \frac{2^{4n}}{5^{2n+1}}$.

17.5 c) On a $\sqrt{\frac{3^{4n}}{9^{2-6n}}} \times \frac{1}{\sqrt{81^n}} = \sqrt{\left(\frac{3^{2n}}{(3^2)^{1-3n}} \times 3^{-2n}\right)^2} = \frac{3^{2n-2n}}{3^{2-6n}} = 3^{6n-2}$.

17.5 d) On a $\sqrt{\frac{2^{52n}}{4^{6n-4}}} \times \frac{\sqrt{64^n}}{\sqrt{125^{2n+2}}} = \frac{\sqrt{5^{4n}}}{\sqrt{2^{12n-8}}} \times \frac{\sqrt{2^{6n}}}{\sqrt{5^{6n+6}}} = \frac{5^{2n} \times 2^{3n}}{2^{6n-4} \times 5^{3n+3}} = 2^{-3n+4} \times 5^{-n-3}$.

17.6 a) On a $\frac{\sqrt{5}-7}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-7)}{\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{15}-7\sqrt{3}}{3}$.

17.6 b) On a :

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{15}-3\sqrt{5}-45\sqrt{15}+10\sqrt{3}}{15} = \frac{10\sqrt{3}-3\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{15}.$$

17.6 c) On a $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{6-4\sqrt{2}}{2} = 3-2\sqrt{2}$.

17.6 d) On a :

$$\begin{aligned} \frac{6-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} + \frac{5-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} &= \frac{(6-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} + \frac{(5-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{18+6\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2}{7} + \frac{10+5\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3}{1} = \frac{65+3\sqrt{2}+21\sqrt{3}}{7}. \end{aligned}$$

17.7 On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5}+2} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}} &= \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} - \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}} \\ &= \sqrt{5}-2 - (\sqrt{5}-2) = 0.\end{aligned}$$

17.8 a) On a $\varphi^2 + 2\varphi - 5 = \frac{1+2\sqrt{5}+5+4+4\sqrt{5}-20}{4} = \frac{-10+6\sqrt{5}}{4} = \frac{-5+3\sqrt{5}}{2}$.

17.8 b) On a $\varphi^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{2+1+2\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi$.

17.8 c) On a $1 + \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi+1}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi$.

17.8 d) On a $\varphi^3 = \varphi \times \varphi^2 = \varphi(1 + \varphi) = \varphi + \varphi^2 = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi$.

17.8 e) On a :

$$\begin{aligned}\varphi^7 &= (\varphi^3)^2 \times \varphi = (1 + 2\varphi)^2 \times \varphi = (1 + 4\varphi + 4\varphi^2) \times \varphi \\ &= \varphi + 4\varphi^3 + 4\varphi^2 = \varphi + 4 + 8\varphi + 4 + 4\varphi = 8 + 13\varphi.\end{aligned}$$

17.9 a) On a $\sqrt{a^3}^4 = \sqrt{(\sqrt{a^3})^2}^2 = (a^3)^2 = a^6$.

17.9 b) On a $\sqrt{\left(\frac{-1}{a}\right)^4}^{-2} = \frac{1}{\frac{1}{a^{-4}}} = a^4$.

17.9 c) On a $\frac{3\sqrt{a^{-2}}^4}{-2\sqrt{a^2}} = \frac{3a^{-4}}{-2a} = -\frac{3}{2}a^{-5}$.

17.9 d) On a $\left(\frac{\sqrt{16\sqrt{a}}}{\sqrt{a^{-4}}}\right)^2 = \frac{16\sqrt{a}}{a^{-4}} = 16a^4\sqrt{a}$.

17.10 On a $\sqrt{a^2\sqrt{a^4\sqrt{a^8\sqrt{a^{16}}}}} = \sqrt{a^2\sqrt{a^4\sqrt{a^8 \times a^8}}} = \sqrt{a^2\sqrt{a^4 \times a^8}} = \sqrt{a^2 \times a^6} = \sqrt{a^8} = a^4$.

17.11 a) On a $\sqrt{(5a)^2 - (4a)^2} = \sqrt{(25a^2 - 16a^2)} = \sqrt{9a^2} = 3a$.

17.11 b) On a $\sqrt{(a^2+1)^2 - (2a)^2} = \sqrt{a^4+2a^2+1-4a^2} = \sqrt{a^4-2a^2+1} = \sqrt{(a^2-1)^2} = a^2-1$.

17.11 c) On a $\sqrt{a^2 - (a-1)^2} = \sqrt{(a-a+1)(a+a-1)} = \sqrt{2a-1}$.

17.11 d) On a $\sqrt{(a^2+2)^2 - 4a^2} = \sqrt{a^4+4a^2+4-4a^2} = \sqrt{a^4+4}$.

17.12 a) On a $2x^2 - 10 = 2(x^2 - \sqrt{5}^2) = 2(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$.

17.12 d) On a $(x+1)^2 - 6 = (x+1)^2 - \sqrt{6}^2 = (x+1 - \sqrt{6})(x+1 + \sqrt{6})$.

17.12 e) On a $2x^4 - 8 = 2((x^2)^2 - 2^2) = 2(x^2 - 2)(x^2 + 2) = 2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2)$.

17.12 f) On a :

$$\begin{aligned}(3x+2)^4 - 25 &= ((3x+2)^2)^2 - 5^2 = ((3x+2)^2 - 5)((3x+2)^2 + 5) \\ &= (3x+2 - \sqrt{5})(3x+2 + \sqrt{5})(9x^2 + 12x + 9).\end{aligned}$$

17.13 a) On a $\frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$.

17.13 b) On a $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}^2-x^2} = \sqrt{x^2+1}+x$.

17.13 c) On a $\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x} = \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}^2-x^2} = \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}$.

17.13 d) On a $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}-2} = \frac{\sqrt{x^2+4}+2}{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)} = \frac{\sqrt{x^2+4}+2}{x^2}$.

17.14 a) On calcule $\frac{(2\sqrt{a}+a)(a-\sqrt{4a})}{-a\sqrt{a}} = -\frac{2a\sqrt{a}-4a+a^2-2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a}} = \frac{4\sqrt{a}-a\sqrt{a}}{a} = \frac{(4-a)\sqrt{a}}{a}$.

17.14 b) On calcule $\frac{\sqrt{a^{4n}} \times \frac{1}{\sqrt{a^{7n}}}}{-\sqrt{a^n}} = -\frac{a^{2n}}{\sqrt{a^{7n+n}}} = -\frac{a^{2n}}{a^{4n}} = -\frac{1}{a^{2n}} = -a^{-2n}$.

17.15 On a $\frac{\sqrt{\sqrt{a}-3}}{\sqrt{\sqrt{a}+3}} - \frac{\sqrt{\sqrt{a}+3}}{\sqrt{\sqrt{a}-3}} = \frac{\sqrt{\sqrt{a}-3}^2}{\sqrt{\sqrt{a}+3}\sqrt{\sqrt{a}-3}} - \frac{\sqrt{\sqrt{a}+3}^2}{\sqrt{\sqrt{a}-3}\sqrt{\sqrt{a}+3}} = \frac{-6}{\sqrt{a-9}} = \frac{-6\sqrt{a-9}}{a-9}$.

17.16 a) On a $2^2 < \sqrt{5}^2$ donc $2 - \sqrt{5} < 0$. Ainsi, $\sqrt{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}$ n'existe pas.

17.16 b) Comparons $\sqrt{\sqrt{5}-2}$ à 1 en comparant leurs carrés : $\sqrt{5}-2$ et 1.

On a $\sqrt{5}-2-1 = \sqrt{5}-3$. Comme $5 < 9$, on a $\sqrt{5} < 3$ et donc $\sqrt{5}-2 < 1$. La quantité initiale n'existe donc pas.

17.17 a) On a $(a+b\sqrt{3})^2 = a^2 + 2ab\sqrt{3} + b^2$. Ainsi, $(a+b\sqrt{3})^2 = 13 - 4\sqrt{3} \iff \begin{cases} a^2 + 3b^2 = 13 \\ 2ab = -4. \end{cases}$

Les nombres a et b sont entiers, donc ils ne peuvent valoir que 1 et -2 , ou -1 et 2. On vérifie que les couples $(1, -2)$ et $(-1, 2)$ vérifient l'équation $a^2 + 3b^2 = 13$. Comme $a < 0$, la seule solution est donc $(-1, 2)$.

17.17 b) On a $-1 + 2\sqrt{3} > 0$ et $(-1 + 2\sqrt{3})^2 = 13 - 4\sqrt{3}$, donc $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = -1 + 2\sqrt{3}$.

17.17 d) On a $\frac{1}{\sqrt{13-4\sqrt{3}}} = \frac{1}{-1+2\sqrt{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}}{(1+2\sqrt{3}) \times (-1+2\sqrt{3})} = \frac{1+2\sqrt{3}}{12-1} = \frac{1}{11} + \frac{2}{11}\sqrt{3}$.

17.18 a) On a $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

17.18 b) On a :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ &= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1}-\sqrt{1} = \sqrt{n+1}-1.\end{aligned}$$

Fiche n° 18. Développement d'expressions I

Réponses

18.1 a) $2x + 2$

18.1 b) $4x + 12$

18.1 c) $5x + 6$

18.1 d) $22x + 30$

18.1 e) $22x + 16$

18.1 f) $14x + 36$

18.2 a) $-2x - 4$

18.2 b) $-3x + 15$

18.2 c) $5x + 8$

18.2 d) $10x - 6$

18.2 e) $-12x + 30$

18.2 f) $-2x + 19$

18.3 a) $x + 2$

18.3 b) $\frac{5}{2}x - \frac{4}{3}$

18.3 c) $-\frac{1}{8}x + \frac{17}{3}$

18.3 d) $-x + \frac{11}{12}$

18.4 a) $10x^2 - 13x - 3$

18.4 b) $15x^2 + 7x - 2$

18.4 c) $-7x^2 + 12x$

18.4 d) $-2x$

18.5 a) $2x^2 - \frac{3}{2}x$

18.5 b) $-\frac{3}{2}x^2 - \frac{63}{4}x + 6$

18.5 c) $\frac{9}{2}x^2 - 17x + \frac{38}{3}$

18.5 d) $40x^2 - x - \frac{1}{20}$

18.6 a) ... $-6xy + 9x + 2y - 3$

18.6 b) $-5ab + 5a - b$

18.6 c) $2t^2 - 3z^2 - tz$

18.6 d) ... $u^2v - uv^2 - 2v + 2u$

18.6 e) $rs - r - s$

18.6 f) $\frac{1}{2}pq$

18.7 a) $\sqrt{3} + 3$

18.7 b) $2\sqrt{5} - 60$

18.7 c) $-2\sqrt{7} + 26$

18.7 d) $46\sqrt{2} + 33$

18.7 e) $\frac{15}{2}\sqrt{2} - 9$

18.7 f) $-\sqrt{15} + 1$

Corrigés

18.1 a) En développant, on obtient $2(x + 1) = 2 \times x + 2 \times 1 = 2x + 2$.

18.1 b) En développant, on obtient $(x + 3) \times 4 = x \times 4 + 3 \times 4 = 4x + 12$.

18.1 c) En développant, puis en réduisant, on obtient $5(1 + x) + 1 = 5 \times 1 + 5 \times x + 1 = 5x + 6$.

18.1 d) On procède comme précédemment pour les questions suivantes.

18.2 a) On procède comme dans l'exercice précédent, en appliquant la règle des signes.

18.3 a) On procède comme dans les exercices précédents, en écrivant les fractions sous leur forme irréductible.

18.4 a) En développant, puis en réduisant on obtient :

$$(2x - 3)(5x + 1) = 2x \times 5x + 2x \times 1 - 3 \times 5x - 3 \times 1 = 10x^2 - 13x - 3.$$

18.4 b) En développant par double distributivité, puis en développant par -1 , on obtient :

$$-(1 - 5x)(3x + 2) = -(3x + 2 - 15x^2 - 10x) = -(-15x^2 - 7x + 2) = 15x^2 + 7x - 2.$$

18.4 c) On a :

$$2x(6 - 5x) + 3x^2 = 12x - 10x^2 + 3x^2 = -7x^2 + 12x.$$

18.4 d) On a :

$$x(3x - 5) - 3x(x - 1) = 3x^2 - 5x - 3x^2 + 3x = -2x.$$

18.5 a) On procède comme dans l'exercice précédent, en écrivant les fractions sous leur forme irréductible.

18.6 a) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$(3x - 1)(-2y + 3) = -6xy + 9x + 2y - 3 = -6xy + 9x + 2y - 3.$$

18.6 b) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$a(-2b + 5) - b(3a + 1) = -2ab + 5a - 3ab - b = -5ab + 5a - b.$$

18.6 c) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$(t + z)(2t - 3z) = 2t^2 - 3tz + 2tz - 3z^2 = 2t^2 - 3z^2 - tz.$$

18.6 d) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$uv(u - v) - 2(v - u) = u^2v - uv^2 - 2v + 2u.$$

18.6 e) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$-\frac{r}{2}(2 - s) - \frac{s}{2}(2 - r) = -\frac{r}{2} \times 2 - \frac{r}{2} \times s - \frac{s}{2} \times 2 + \frac{s}{2} \times r = -r + \frac{rs}{2} - s + \frac{rs}{2} = rs - r - s.$$

18.6 f) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$p\left(q - \frac{1}{2}p\right) + \frac{1}{2}p(p - q) = pq - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}pq = \frac{1}{2}pq.$$

18.7 a) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 1 = 3 + \sqrt{3}.$$

18.7 b) En développant, puis en réduisant, on obtient :

$$4\sqrt{5}\left(\frac{1}{2} - 3\sqrt{5}\right) = 4\sqrt{5} \times \frac{1}{2} - 4\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 12 \times 5 = 2\sqrt{5} - 60.$$

18.7 c) On procède de la même manière pour les questions suivantes.

Fiche n° 19. Factorisations

Réponses

19.1 a) $(2x - 3)(8x + 1)$

19.1 b) $(7x - 3)(x - 5)$

19.1 c) $(3x + 7)(2x - 3)$

19.2 a) $(2t - 1)(9t - 6)$

19.2 b) $(y - 3)(-2y - 13)$

19.2 c) $(3a - \sqrt{2})(2a - 3)$

19.2 d) $\left(3t - \frac{1}{4}\right)(-2t + 6)$

19.3 a) $\frac{1}{3}x - 4 = \boxed{-1} \times \left(4 - \frac{1}{3}x\right)$

19.3 b) $\left(\frac{1}{3}x - 4\right)(4x - 10)$

19.3 c) $(3t - 1)(3t + 7)$

19.3 d) $(9 - 2x)\left(8x + \frac{13}{3}\right)$

19.4 a) $(6t - 9) = \boxed{3} \times (2t - 3)$

19.4 b) $(2t - 3)(13t + 10)$

19.4 c) $(x - 7)(-8x + 1)$

19.4 d) $(2x - 5)(7x - 9)$

19.4 e) $\left(x - \frac{1}{3}\right)(24x + 11)$

19.5 a) $(7x - 1)(14x - 4)$

19.5 b) $(2t - 1)(2t - 7\sqrt{3})$

19.5 c) $(4z - 1)(-z^2 + 4z + 18)$

19.6 a) $(2x + 3)(9x - 1)$

19.6 b) $(7x - 1)(25x - 22)$

Corrigés

19.1 a) Le facteur commun est $2x - 3$. Donc, on peut écrire :

$$(x + 5)(2x - 3) + (7x - 4)(2x - 3) = (2x - 3)(x + 5 + 7x - 4) = (2x - 3)(8x + 1).$$

19.1 c) On a $(2x - 4)(3x + 7) + 3x + 7 = (2x - 4)(3x + 7) + (3x + 7) \times 1 = (3x + 7)(2x - 4 + 1) = (3x + 7)(2x - 3)$.

19.2 a) On a $(2t - 1)(6t - 5) + (3t - 1)(2t - 1) = (2t - 1)(6t - 5 + 3t - 1) = (2t - 1)(9t - 6)$.

19.2 b) Le facteur commun est $y - 3$. Donc, on peut écrire :

$$(y - 3)(2y - 4) - (y - 3)(4y + 9) = (y - 3)((2y - 4) - (4y + 9)) = (y - 3)(2y - 4 - 4y - 9) = (y - 3)(-2y - 13).$$

19.2 c) Le facteur commun est $(3a - \sqrt{2})$. Donc, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (3a - \sqrt{2})(4a + 2) - (2a + 5)(3a - \sqrt{2}) &= (3a - \sqrt{2})((4a + 2) - (2a + 5)) \\ &= (3a - \sqrt{2})(4a + 2 - 2a - 5) = (3a - \sqrt{2})(2a - 3). \end{aligned}$$

19.2 d) On a :

$$\begin{aligned} \left(3t - \frac{1}{4}\right)(-2t + 7) - \left(3t - \frac{1}{4}\right) &= \left(3t - \frac{1}{4}\right)(-2t + 7) - \left(3t - \frac{1}{4}\right) \times 1 \\ &= \left(3t - \frac{1}{4}\right)((-2t + 7) - 1) = \left(3t - \frac{1}{4}\right)(-2t + 6). \end{aligned}$$

19.3 b) On fait apparaître un facteur commun, en écrivant :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}x - 4\right)(x - 8) + \left(4 - \frac{1}{3}x\right)(-3x + 2) &= \left(\frac{1}{3}x - 4\right)(x - 8) + (-1) \times \left(\frac{1}{3}x - 4\right)(-3x + 2) \\ &= \left(\frac{1}{3}x - 4\right)(x - 8 - (-3x + 2)) = \left(\frac{1}{3}x - 4\right)(4x - 10).\end{aligned}$$

19.3 c) On remarque que $(1 - 3t) = -1 \times (3t - 1)$; on prend donc $3t - 1$ comme facteur commun. On a :

$$\begin{aligned}(3t - 1)(t + 4) - (2t + 3)(1 - 3t) &= (3t - 1)(t + 4) - (2t + 3) \times (-1) \times (3t - 1) \\ &= (3t - 1)(t + 4 - (-1) \times (2t + 3)) = (3t - 1)(3t + 7).\end{aligned}$$

19.4 b) On fait apparaître un facteur commun, en écrivant $6t - 9 = 3(2t - 3)$. On a :

$$\begin{aligned}(2t - 3)(7t + 1) + (6t - 9)(2t + 3) &= (2t - 3)(7t + 1) + 3 \times (2t - 3)(2t + 3) \\ &= (2t - 3)(7t + 1 + 3 \times (2t + 3)) = (2t - 3)(13t + 10).\end{aligned}$$

19.4 c) On fait apparaître un facteur commun, en écrivant $14 - 2x = -2 \times (x - 7)$. On a :

$$\begin{aligned}(x - 7)(2x + 3) + (14 - 2x)(5x + 1) &= (x - 7)(2x + 3) + (-2) \times (x - 7)(5x + 1) \\ &= (x - 7)(2x + 3 - 2(5x + 1)) = (x - 7)(-8x + 1).\end{aligned}$$

19.4 d) On remarque que $20 - 8x = -4 \times (2x - 5)$ et on procède comme précédemment.

19.4 e) On remarque que $3x - 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$ et on factorise par $x - \frac{1}{3}$. On a :

$$\begin{aligned}(3x - 1)(7x + 2) + (3x + 5)\left(-\frac{1}{3} + x\right) &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(7x + 2) + (3x + 5)\left(x - \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(3(7x + 2) + 3x + 5\right) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(24x + 11).\end{aligned}$$

19.5 a) On a :

$$\begin{aligned}2(3x - 4)(7x - 1) + 4(7x - 1)(2x + 1) &= (7x - 1) \times 2(3x - 4) + (7x - 1) \times 4(2x + 1) \\ &= (7x - 1)(2(3x - 4) + 4(2x + 1)) = (7x - 1)(14x - 4).\end{aligned}$$

19.5 b) On a :

$$\begin{aligned}5(2t - 1)(t + \sqrt{3}) - 3(2t - 1)(t + 4\sqrt{3}) &= (2t - 1)(5(t + \sqrt{3}) - 3(t + 4\sqrt{3})) \\ &= (2t - 1)(5t + 5\sqrt{3} - 3t - 12\sqrt{3}) = (2t - 1)(2t - 7\sqrt{3}).\end{aligned}$$

19.5 c) On a :

$$\begin{aligned}3(4z - 1)(z + 2) - (z + 3)(z - 4)(4z - 1) &= (4z - 1)(3(z + 2) - (z + 3)(z - 4)) \\ &= (4z - 1)(3z + 6 - (z^2 - z - 12)) = (4z - 1)(-z^2 + 4z + 18).\end{aligned}$$

19.6 a) On remarque que $(2x + 3)^2 = (2x + 3)(2x + 3)$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}(2x + 3)^2 + (2x + 3)(7x - 4) &= (2x + 3)(2x + 3) + (2x + 3)(7x - 4) \\ &= (2x + 3)(2x + 3 + 7x - 4) = (2x + 3)(9x - 1).\end{aligned}$$

19.6 b) On a :

$$\begin{aligned}4(7x - 1)^2 - 3(x + 6)(7x - 1) &= 4(7x - 1)(7x - 1) - 3(x + 6)(7x - 1) \\ &= (7x - 1)(4(7x - 1) - 3(x + 6)) = (7x - 1)(28x - 4 - 3x - 18) \\ &= (7x - 1)(25x - 22).\end{aligned}$$

Fiche n° 20. Premières identités remarquables

Réponses

20.1 a) $x^2 + 2x + 1$	20.3 c) $18x^2 + 12x + 2$	20.7 c) $t^4 - 16$
20.1 b) $4x^2 - 20x + 25$	20.3 d) $-25x^2 + 10x + 2$	20.7 d) $4t^3 + 8t^2 - 11t + 3$
20.1 c) $9t^2 + 8t + \frac{16}{9}$	20.4 a) $5 - 2\sqrt{6}$	20.8 a) $\frac{a^4}{4} - a^2b + b^2$
20.1 d) $\frac{9}{4}t^2 - 6t + 4$	20.4 b) $107 - 40\sqrt{6}$	20.8 b) $4t + 4 + \frac{1}{t}$
20.2 a) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2$	20.5 a) $\frac{28}{3} + 2\sqrt{3}$	20.8 c) . $4a^2b^2 + 12ab^2t + 9b^2t^2$
20.2 b) $\frac{t^2}{2} + \sqrt{2}t + 1$	20.5 b) $\frac{9}{2} - 2\sqrt{2}$	20.8 d) $a^6 - b^6$
20.2 c) $\frac{9}{y} - \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{1}{4}$	20.5 c) $\frac{5\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3}$	20.9 a) $25x^2t^4 - 30x^3y^3t^2 + 9x^4y^6$
20.2 d) $y - \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{1}{y^2}$	20.5 d) $\frac{221}{16} - \frac{3\sqrt{30}}{4}$	20.9 b) $x^2 + 9y^2 + \frac{1}{4}t^2 - xt + 6xy - 3yt$
20.3 a) $\frac{y^2}{4} + \frac{1}{y^2} - 1$	20.6 a) $12 + 9\sqrt{2}$	20.9 c) . $9x^2 + 4y^2 + 25z^2 - 12xy + 30xz - 20yz$
20.3 b) $y - 2\sqrt{y} + 1$	20.6 b) 3	20.9 d) . $x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$
	20.7 a) $2t - 1$	
	20.7 b) $t^2 + 1$	

Corrigés

20.1 a) On a $(x + 1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2$.

20.1 c) On a $\left(3t + \frac{4}{3}\right)^2 = (3t)^2 + 2 \times 3t \times \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 9t^2 + 8t + \frac{16}{9}$.

20.1 d) On a $\left(\frac{3}{2}t - 2\right)^2 = \left(\frac{3}{2}t\right)^2 - 2 \times \frac{3}{2}t \times 2 + 2^2 = \frac{9}{4}t^2 - 6t + 4$.

20.2 a) On a $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3}x)^2 - 2 \times \sqrt{3}x \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2$.

20.2 b) On a $\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + 1\right)^2 = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \times \frac{t}{\sqrt{2}} \times 1 + 1^2 = \frac{t^2}{2} + \sqrt{2}t + 1$.

20.2 c) On a $\left(\frac{3}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{y}}\right)^2 - 2 \times \frac{3}{\sqrt{y}} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{y} - \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{1}{4}$.

20.2 d) On a $\left(\sqrt{y} - \frac{1}{y}\right)^2 = (\sqrt{y})^2 - 2 \times \sqrt{y} \times \frac{1}{y} + \left(\frac{1}{y}\right)^2 = y - \frac{2}{\sqrt{y}} + \frac{1}{y^2}$.

20.3 a) On a $\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{y}\right)^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{y}{2} \times \frac{1}{y} + \left(\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{y^2}{4} - 1 + \frac{1}{y^2} = \frac{y^2}{4} + \frac{1}{y^2} - 1$.

20.3 c) On a $2(3x+1)^2 = 2((3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2) = 2(9x^2 + 6x + 1) = 18x^2 + 12x + 2$.

20.3 d) On a $3-(1-5x)^2 = 3-(1^2 - 2 \times 1 \times 5x + (5x)^2) = 3-(1-10x+25x^2) = 3-1+10x-25x^2 = -25x^2+10x+2$.

20.4 b) On a $(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})^2 = (5\sqrt{3})^2 - 2 \times 5\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} + (4\sqrt{2})^2 = 5^2 \times (\sqrt{3})^2 - 40\sqrt{6} + 4^2 \times (\sqrt{2})^2 = 107 - 40\sqrt{6}$.

20.5 a) On a $\left(3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 9 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = \frac{28}{3} + 2\sqrt{3}$.

20.5 c) On a $\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}((\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2-2\sqrt{6}+3) = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3}$.

20.5 d) On a $\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}}{4} + \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{27}{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{16} = \frac{221}{16} - \frac{3\sqrt{30}}{4}$.

20.6 a) On a $\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2 = \sqrt{2}((\sqrt{3})^2 + 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2) = \sqrt{2}(3+2\sqrt{18}+6) = \sqrt{2}(9+2\sqrt{18}) = 12+9\sqrt{2}$.

20.6 b) On a $1 - (\sqrt{5} - \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{7}) = 1 - ((\sqrt{5})^2 - (\sqrt{7})^2) = 1 - (5 - 7) = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$.

20.7 b) On a $2t^2 - (t-1)(t+1) = 2t^2 - (t^2 - 1) = 2t^2 - t^2 + 1 = t^2 + 1$.

20.7 c) On a $(t^2+4)(t-2)(t+2) = (t^2+4)(t^2-2^2) = (t^2+4)(t^2-4) = (t^2)^2 - 4^2 = t^4 - 16$.

20.7 d) On a $(t+3)(2t-1)^2 = (t+3)(4t^2-4t+1) = 4t^3-4t^2+t+12t^2-12t+3 = 4t^3+8t^2-11t+3$.

20.8 b) On a $\left(2\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 = (2\sqrt{t})^2 + 2 \times 2\sqrt{t} \times \frac{1}{\sqrt{t}} + \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 = 4t + 4 + \frac{1}{t}$.

20.8 c) On a $(2ab+3bt)^2 = (2ab)^2 + 2 \times 2ab \times 3bt + (3bt)^2 = 4a^2b^2 + 12ab^2t + 9b^2t^2$.

20.8 d) On a $(a^3-b^3)(a^3+b^3) = (a^3)^2 - (b^3)^2 = a^6 - b^6$.

20.9 a) On a $(5xt^2-3x^2y^3)^2 = (5xt^2)^2 - 2 \times 5xt^2 \times 3x^2y^3 + (3x^2y^3)^2 = 25x^2t^4 - 30x^3y^3t^2 + 9x^4y^6$.

20.9 b) On a :

$$\begin{aligned} \left(x+3y-\frac{1}{2}t\right)^2 &= x^2 + 2 \times x \times \left(3y-\frac{1}{2}t\right) + \left(3y-\frac{1}{2}t\right)^2 = x^2 + 6xy - xt + 9y^2 - 2 \times 3y \times \frac{1}{2}t + \left(\frac{1}{2}t\right)^2 \\ &= x^2 + 9y^2 + \frac{1}{4}t^2 + 6xy - xt - 3yt. \end{aligned}$$

20.9 c) On a :

$$\begin{aligned} (3x-2y+5z)^2 &= (3x-2y)^2 + 2 \times (3x-2y) \times 5z + (5z)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2 + 30xz - 20yz + 25z^2 \\ &= 9x^2 + 4y^2 + 25z^2 - 12xy + 30xz - 20yz. \end{aligned}$$

20.9 d) On a :

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2 = (x+y)(x^2+2xy+y^2) = x^3 + 2x^2y + xy^2 + yx^2 + 2xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2. \end{aligned}$$

Fiche n° 21. Factorisations à l'aide de $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Réponses

21.1 a)	$(x - 3)(x + 3)$	21.4 b)	$(2y - x - 1)(2y + x + 1)$
21.1 b)	$(x - 5)(x + 5)$	21.4 c)	$-4yx^2$
21.1 c)	$(2 - x)(2 + x)$	21.4 d)	$\left(-\frac{1}{2}xy - 1\right)\left(\frac{3}{2}xy + 1\right)$
21.1 d)	$(2x - 6)(2x + 6)$	21.5 a)	$(2 - x)(4 + x)$
21.1 e)	$(7 - 3x)(7 + 3x)$	21.5 b)	$3x(x + 2)$
21.1 f)	$(1 - 2x)(1 + 2x)$	21.5 c)	$-7x(2 - 3x)$
21.2 a)	$(4 - x)(8 + x)$	21.5 d)	$\left(-x - \frac{4}{3}\right)\left(2x + \frac{2}{3}\right)$
21.2 b)	$-2(2x + 4)$	21.6 a)	$2x^2 - \frac{1}{2}$
21.2 c)	$(x + 4)(3x - 2)$	21.6 b)	$\frac{1}{2}(2x - 1)(2x + 1)$
21.2 d)	$(6x - 8)(4x - 4)$	21.7 a)	$\frac{1}{3}(3x - 1)(3x + 1)$
21.3 a)	$-\frac{1}{36}(2x - 3)(2x + 3)$	21.7 b)	$\frac{1}{5}(x - 5)(x + 5)$
21.3 b)	$\frac{1}{225}(6x - 5)(6x + 5)$	21.7 c)	$\frac{1}{7}(7 - x)(7 + x)$
21.3 c)	$-\frac{1}{36}(x - 6)(x + 6)$	21.7 d)	$\frac{1}{27}(x - 3)(x + 3)$
21.3 d)	$-\frac{1}{4}(3x - 10)(3x + 10)$		
21.4 a)	$(x - y)(x + y)$		

Corrigés

21.1 a) On a $x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$.

21.1 b) On a $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$.

21.1 d) On a $4x^2 - 36 = (2x)^2 - 6^2 = (2x - 6)(2x + 6)$.

21.1 e) On a $49 - 9x^2 = 7^2 - (3x)^2 = (7 - 3x)(7 + 3x)$.

21.1 f) On a $-4x^2 + 1 = 1 - (2x)^2 = (1 - 2x)(1 + 2x)$.

21.2 a) On a $36 - (x + 2)^2 = 6^2 - (x + 2)^2 = (6 - x - 2)(6 + x + 2) = (4 - x)(8 + x)$.

21.3 a) On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} - \frac{x^2}{9} &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right) = \left(\frac{3-2x}{6}\right)\left(\frac{3+2x}{6}\right) \\ &= -\frac{1}{36}(2x-3)(2x+3).\end{aligned}$$

21.4 b) On a $4y^2 - (x+1)^2 = (2y)^2 - (x+1)^2 = (2y-x-1)(2y+x+1)$.

21.4 c) On a $(x^2-y)^2 - (x^2+y)^2 = (x^2-y-x^2-y)(x^2-y+x^2+y) = -2y(x^2+x)$.

21.4 d) On a :

$$\frac{1}{4}x^2y^2 - (xy+1)^2 = \left(\frac{1}{2}xy\right)^2 - (xy+1)^2 = \left(\frac{1}{2}xy - xy - 1\right)\left(\frac{1}{2}xy + xy + 1\right) = \left(-\frac{1}{2}xy - 1\right)\left(\frac{3}{2}xy + 1\right).$$

21.5 a) En appliquant la première identité remarquable, on obtient :

$$9 - (x^2 + 2x + 1) = 3^2 - (x+1)^2 = (3-x-1)(3+x+1) = (2-x)(4+x).$$

21.5 b) En utilisant la deuxième identité remarquable, on obtient :

$$(2x+1)^2 - (x^2 - 2x + 1) = (2x+1)^2 - (x-1)^2 = (2x+1-x+1)(2x+1+x-1) = 3x(x+2).$$

21.5 c) Pour commencer, on remarque qu'on a $(1-5x)^2 - 4x^2 - 4x - 1 = (1-5x)^2 - (4x^2 + 4x + 1)$. Puis en appliquant la première identité remarquable, on obtient :

$$(1-5x)^2 - (4x^2 + 4x + 1) = (1-5x)^2 - (2x+1)^2 = (1-5x-2x-1)(1-5x+2x+1) = -7x(-3x+2).$$

21.5 d) En appliquant la deuxième identité remarquable, on obtient :

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} - \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^2 = \left(-x - \frac{4}{3}\right)\left(2x + \frac{2}{3}\right).$$

21.6 a) En développant, on retrouve l'expression de l'énoncé.

21.6 b) D'après ce qui précède, on a $2x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(4x^2 - 1)$. En appliquant la troisième identité remarquable, on obtient :

$$\frac{1}{2}(4x^2 - 1) = \frac{1}{2}((2x)^2 - 1^2) = \frac{1}{2}(2x-1)(2x+1).$$

21.7 a) En factorisant l'expression par $\frac{1}{3}$, on a $3x^2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(9x^2 - 1)$. On applique la troisième identité remarquable :

$$\frac{1}{3}(9x^2 - 1) = \frac{1}{3}((3x)^2 - 1^2) = \frac{1}{3}(3x-1)(3x+1).$$

21.7 b) On procède comme précédemment, en factorisant l'expression de départ par $\frac{1}{5}$.

21.7 c) On procède comme précédemment, en factorisant l'expression par $\frac{1}{7}$.

21.7 d) On change l'ordre des termes, puis on procède comme ci-dessus, en factorisant l'expression par $\frac{1}{27}$.

Fiche n° 22. Développement d'expressions II

Réponses

- 22.1 a) $x^3 - x^2 + x + 3$
- 22.1 b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
- 22.1 c) $-2x^5 + x^3 - 2x^2y + 14x^2 + y - 7$
- 22.1 d) $\sqrt{10}x^2 - 3xy - \sqrt{10}y^2$
- 22.2 a) $z^4 - 256$
- 22.2 b) $u^3 + 2\sqrt{2}u^2 + 4u + 2\sqrt{2}$
- 22.2 c) $(1 + \sqrt{2})a^3 + ab^3 - a^2b + (1 - \sqrt{2})b^4$
- 22.3 a) $x^4 - 4x^3 + 4x^2$
- 22.3 b) $4y^4 + 16y^3 + 16y^2$
- 22.4 a) $x^3 - 1$
- 22.4 b) $v^5 + 1$
- 22.5 a) $t^4 - 81$
- 22.5 b) $z^5 - 4\sqrt{2}$
- 22.6 a) $x^3 + 9x^2 + 15x - 25$
- 22.6 b) $-u^3 + 5u^2 + 8u - 48$
- 22.6 c) $v^4 - 2v^3 - 3v^2 + 4v + 4$
- 22.6 d) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
- 22.7 a) $4xy$
- 22.7 b) $12u^2 + 16$
- 22.8 a) $x^2 + x - 1 - \frac{1}{x}$
- 22.8 b) $z^3 - z^2 - 5z + 2$
- 22.9 a) $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$
- 22.9 b) $ab + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + 1$

Corrigés

- 22.1 a) On a $(x+1)(x^2-2x+3) = x^3 - 2x^2 + 3x + x^2 - 2x + 3 = x^3 - x^2 + x + 3$.
- 22.1 b) On écrit $(x+y+z)^2 = (x+y+z)(x+y+z)$, puis on développe :
- $$(x+y+z)^2 = x^2 + xy + xz + yx + y^2 + yz + zx + zy + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$
- 22.1 c) On a $-(2x^2-1)(x^3+y-7) = (-2x^2+1)(x^3+y-7) = -2x^5 + x^3 - 2x^2y + 14x^2 + y - 7$.
- 22.1 d) Sachant que $\sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{10}$, on obtient $x^2\sqrt{10} - 5xy + 2xy - y^2\sqrt{10} = x^2\sqrt{10} - 3xy - y^2\sqrt{10}$.
- 22.2 a) On développe : $(z+4)(z-4)(z^2+16) = (z^2-16)(z^2+16) = z^4 - 256$.
- 22.2 b) On a $(u+\sqrt{2})(u^2+u\sqrt{2}+2) = u^3 + \sqrt{2}u^2 + 2u + \sqrt{2}u^2 + 2u + 2\sqrt{2} = u^3 + 2\sqrt{2}u^2 + 4u + 2\sqrt{2}$.
- 22.2 c) Il faut commencer par observer que $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1$. Ainsi, en développant :
- $$((1+\sqrt{2})a-b)(a^2-(1-\sqrt{2})b^3) = (1+\sqrt{2})a^3 + ab^3 - a^2b + (1-\sqrt{2})b^4.$$
- 22.3 a) On commence par développer le produit à l'intérieur des parenthèses. On a $(x+3)(x-5) = x^2 - 2x - 15$. Ainsi, $(x+3)(x-5)+15 = x^2 - 2x$ et, enfin, $((x+3)(x-5)+15)^2 = (x^2 - 2x)^2 = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

22.3 b) On développe l'expression intérieure : $\left(\frac{1}{2}y - 1\right)^2 - \left(\frac{3}{2}y + 1\right)^2 = -2y^2 - 4y$, après réduction.

On développe ensuite $(-2y^2 - 4y)^2$ pour conclure, cela donne : $(-2y^2 - 4y)^2 = 4y^4 + 16y^3 + 16y^2$.

22.4 a) On développe et on observe que la plupart des termes s'annulent. Seuls les termes de degré extrême subsistent : c'est une somme télescopique. Plus en détail, on a $(x-1)(1+x+x^2) = x+x^2+x^3-1-x-x^2 = x^3-1$.

22.4 b) C'est le même principe que dans la question précédente. On développe et on observe à nouveau qu'il ne reste que les termes de degré extrême. Plus en détail, on a :

$$(v+1)(1-v+v^2-v^3+v^4) = v-v^2+v^3-v^4+v^5+1-v-v^2-v^3+v^4 = v^5+1.$$

22.5 a) On retrouve une structure similaire à l'exercice précédent. On a :

$$(t+3)(-27+9t-3t^2+t^3) = -27t+9t^2-3t^3+t^4-81+27t-9t^2+3t^3 = t^4-81.$$

22.5 b) C'est toujours le même principe avec des opérations sur les racines carrées. On a :

$$(z-\sqrt{2})(4+2\sqrt{2}z+2z^2+\sqrt{2}z^3+z^4) = 4z+2\sqrt{2}z^2+2z^3+\sqrt{2}z^4+z^5-4\sqrt{2}-4z-2\sqrt{2}z^2-2z^3-\sqrt{2}z^4 = z^5-4\sqrt{2}.$$

De manière générale, on peut montrer que, pour tous réels x et a et tout entier naturel n , on a :

$$(x-a)(x^n+x^{n-1}a+x^{n-2}a^2+\dots+x^2a^{n-2}+xa^{n-1}+a^n) = x^{n+1}-a^{n+1}.$$

22.6 a) On développe : $(x-1)(x+5)^2 = (x-1)(x^2+10x+25) = x^3+9x^2+15x-25$.

22.6 b) On développe : $-(u+3)(u-4)^2 = (-u-3)(u^2-8u+16) = -u^3+5u^2+8u-48$.

22.6 c) On a $(v+1)^2 = v^2+2v+1$ et $(v-2)^2 = v^2-4v+4$. Ainsi, on a :

$$(v+1)^2(v-2)^2 = (v^2+2v+1)(v^2-4v+4) = v^4-2v^3-3v^2+4v+4.$$

22.6 d) On peut utiliser les propriétés des puissances pour simplifier les calculs.

On remarque que $(x+y)^2(x-y)^2 = ((x+y)(x-y))^2$. Puisque $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$, on obtient le résultat final en développant $(x^2-y^2)^2$, ce qui donne $x^4-2x^2y^2+y^4$.

22.7 a) On a $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ et $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$. Ainsi, par soustraction des deux résultats, on a $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$.

22.7 b) On a $(u+2)^3 = (u+2)(u^2+4u+4) = u^3+6u^2+12u+8$ et, de manière analogue :

$$(u-2)^3 = u^3-6u^2+12u-8.$$

Ainsi, par soustraction des deux résultats, on a $(u+2)^3 - (u-2)^3 = 12u^2+16$.

22.8 a) On a $\left(1-\frac{1}{x}\right)(x^2+2x+1) = x^2+2x+1-x-2-\frac{1}{x} = x^2+x-1-\frac{1}{x}$.

22.8 b) On a $\left(1+\frac{2}{z}\right)(z^3-3z^2+z) = z^3-3z^2+z+2z^2-6z+2 = z^3-z^2-5z+2$.

Fiche n° 23. Relations entre variables

Réponses

23.1 a).....	$\frac{U}{R}$	23.4 a).....	$\frac{g^2}{a}$	23.7 a).....	$\frac{y+8}{16}$
23.1 b).....	$3M - b - c$	23.4 b).....	$\sqrt{ab}$	23.7 b).....	$\frac{y}{4} + \frac{1}{3y}$
23.1 c).....	$\frac{a-r}{q}$	23.5 a).....	$\frac{pq}{p+q}$	23.7 c).....	$\frac{y^2+6}{10}$
23.2 a).....	$100(C-1)$	23.5 b).....	$\frac{pr}{p-r}$	23.7 d).....	$\frac{21y+1}{42y+3}$
23.2 b).....	$100(1-C)$	23.6 a).....	$\frac{y+1}{y-1}$	23.8 a).....	$\frac{1+2y^2}{1-y^2}$
23.2 c).....	$340 - 100C$	23.6 b).....	$\frac{y-2}{y+1}$	23.8 b).....	$\frac{2-y^2}{2y-2}$
23.2 d).....	$\frac{20C+220}{3}$	23.6 c).....	$\frac{5y+1}{4-y}$	23.8 c).....	$\frac{y^2}{2y+1}$
23.3 a).....	$\frac{100t}{100-t}$	23.6 d).....	$\frac{2y+12}{1-14y}$	23.8 d).....	$\frac{y^4+4}{4y^2}$
23.3 b).....	$\frac{100t}{t+100}$				
23.3 c).....	$\frac{10\,000(t+u)+100tu}{(100+t)(100+u)}$				

Corrigés

- 23.1 b)** On a $M = \frac{a+b+c}{3}$, donc $3M = a+b+c$ et ainsi $a = 3M - b - c$.
-
- 23.1 c)** On a $a = b \times q + r$, donc $b \times q = a - r$ et ainsi $b = \frac{a-r}{q}$.
-
- 23.2 a)** On a $C = 1 + \frac{t}{100}$, donc $100C = 100 + t$. D'où $t = 100C - 100 = 100(C - 1)$.
-
- 23.2 c)** On a $10C + \frac{t}{10} = 34$, donc $100C + t = 340$. D'où $t = 340 - 100C$.
-
- 23.2 d)** On a $4C - \frac{3t}{5} = -44$, donc $\frac{3t}{5} = 4C + 44$. D'où $t = \frac{5(4C+44)}{3} = \frac{20C+220}{3}$.
-
- 23.3 a)** On a $\left(1 - \frac{t}{100}\right)\left(1 + \frac{t'}{100}\right) = 1$, soit $(100-t)(100+t') = 10\,000$. Donc, pour tout $t \neq 100$, on a $100+t' = \frac{10\,000}{100-t}$. Ainsi, on a $t' = \frac{10\,000}{100-t} - 100 = \frac{100t}{100-t}$.
-
- 23.3 b)** On a $\left(1 + \frac{t}{100}\right)\left(1 - \frac{t'}{100}\right) = 1$, soit $(100+t)(100-t') = 10\,000$. Donc, pour tout $t \neq -100$, on a $100-t' = \frac{10\,000}{100+t}$. Ainsi, on a $t' = 100 - \frac{10\,000}{100+t} = \frac{100t}{100+t}$.
-

23.3 c) On a $\left(1 + \frac{t}{100}\right)\left(1 + \frac{u}{100}\right)\left(1 - \frac{t'}{100}\right) = 1$, d'où $(100+t)(100+u)(100-t') = 1\,000\,000$. Pour $t, u \neq -100$, on a ainsi $100 - t' = \frac{1\,000\,000}{(100+t)(100+u)}$ et donc $t' = 100 - \frac{1\,000\,000}{(100+t)(100+u)} = \frac{10\,000(t+u) + 100tu}{(100+t)(100+u)}$.

23.4 b) On a $\frac{a}{g} = \frac{g}{b}$, donc $g^2 = ab$, et ainsi $g = \sqrt{ab}$, car $g > 0$.

23.5 a) On a $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{pq}$. Donc $r = \frac{pq}{p+q}$.

23.5 b) On a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, donc $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p} = \frac{p-r}{pr}$. Ainsi, $q = \frac{pr}{p-r}$.

23.6 a) On a $y = \frac{x+1}{x-1}$, donc $y(x-1) = x+1$, soit $(y-1)x = y+1$. Donc, pour tout $y \neq 1$, $x = \frac{y+1}{y-1}$.

23.6 b) On a $y = \frac{x+2}{1-x}$, donc $y(1-x) = x+2$, soit $(y+1)x = y-2$. Donc, pour tout $y \neq -1$, $x = \frac{y-2}{y+1}$.

23.6 d) On a $2y(7x+1) = x-12$, soit $(1-14y)x = 2y+12$. Donc, pour tout $y \neq \frac{1}{14}$, $x = \frac{2y+12}{1-14y}$.

23.7 a) On a $(2x+1)^2 - (2x-3)^2 = (4x^2 + 4x + 1) - (4x^2 - 12x + 9) = 16x - 8$. Donc, $y = 16x - 8$ et donc $16x = y + 8$. Ainsi, on a $x = y + 8/16$.

23.7 b) On a $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - (x-y)^2 = \left(x^2 + xy + \frac{y^2}{4}\right) - (x^2 - 2xy + y^2) = 3xy - \frac{3y^2}{4}$. Donc, $3xy - \frac{3y^2}{4} = 1$ et donc $3xy = 1 + \frac{3y^2}{4}$. Ainsi, pour tout $y \neq 0$, on obtient $x = \frac{y}{4} + \frac{1}{3y}$.

23.7 c) On a $(3x+1)^2 - (3x-4)^2 = (9x^2 + 6x + 1) - (9x^2 - 24x + 16) = 30x - 15$. Donc, $\frac{30x-15}{y^2+1} = 3$ et donc $30x - 15 = 3y^2 + 3$. Ainsi, on a $x = 3y^2 + 18/30 = y^2 + 6/10$.

23.7 d) On a $(3x-2)^2 - (3x+5)^2 = (9x^2 - 12x + 4) - (9x^2 + 30x + 25) = -42x - 21$. Donc, $y = \frac{3x+1}{-42x-21}$ et donc $(-42x-21)y = 3x+1$. Ainsi $(42y+3)x = -(21y+1)$. Donc, pour tout $y \neq -\frac{1}{14}$, on obtient $x = -\frac{21y+1}{42y+3}$.

23.8 a) Comme $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$, on a $y^2 = \frac{x-1}{x+2}$, donc $y^2(x+2) = x-1$. Donc, $(1-y^2)x = 1+2y^2$. Ainsi, pour tout $y \neq \pm 1$, on obtient $x = \frac{1+2y^2}{1-y^2}$.

23.8 b) Comme $y+x = \sqrt{x^2+2x+2}$, on a $(y+x)^2 = x^2+2x+2$ et donc $y^2+2xy+x^2 = x^2+2x+2$. Donc, on a $x(2y-2) = 2-y^2$, et, pour tout $y \neq 1$, on obtient $x = \frac{2-y^2}{2y-2}$.

23.8 c) Comme $y = x + \sqrt{x(x+1)}$, on a $y-x = \sqrt{x(x+1)} = \sqrt{x^2+x}$, et ainsi $(y-x)^2 = x^2+x$. Donc, $y^2-2xy+x^2 = x^2+x$ et donc $y^2-2xy = x$. D'où, $x(2y+1) = y^2$; ainsi, pour tout $y \neq -\frac{1}{2}$, on a $x = \frac{y^2}{2y+1}$.

23.8 d) Comme $y + \sqrt{x-1} = \sqrt{x+1}$, on a $(y + \sqrt{x-1})^2 = x+1$ donc $y^2 + 2\sqrt{x-1}y + x-1 = x+1$, et ainsi $2\sqrt{x-1}y = 2-y^2$. Pour tout $y \neq 0$, on obtient $\sqrt{x-1} = \frac{2-y^2}{2y}$, donc $x-1 = \frac{(2-y^2)^2}{4y^2}$. D'où :

$$x = 1 + \frac{(2-y^2)^2}{4y^2} = 1 + \frac{4-4y^2+y^4}{4y^2} = \frac{y^4+4}{4y^2}.$$

Fiche n° 24. Bilan et approfondissement sur les factorisations

Réponses

- 24.1 a) $\textcircled{c}$ 24.7 a) $a^3 - b^3$
- 24.1 b) $\textcircled{a}$ 24.7 b) $(x-3)(x^2+3x+9)$
- 24.1 c) $\textcircled{c}$ 24.7 c) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^4+3x^2+9)$
- 24.2 a) $(3x+1)(-7x+1)$ 24.7 d) $(x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$
- 24.2 b) $-2(2x-7)(x+2)$ 24.8 a) $(x-3)(x-1)$
- 24.2 c) $(x-5)(x-6)$ 24.8 b) $(2x+3)(2x+9)$
- 24.2 d) $(5x-1)(7x+5)$ 24.9 a) $2x$
- 24.3 a) $(x+7)^2$ 24.9 b) $\frac{x-4}{x-2}$
- 24.3 b) $4(x+4)^2$ 24.9 c) $\frac{x-3}{2x+3}$
- 24.3 c) $(x-9)^2$ 24.9 d) $\frac{x-1}{x+2}$
- 24.3 d) $3(3x-11)(x-1)$ 24.10 a) 35 000
- 24.3 e) $(6x-5)^2$ 24.10 b) 40 000
- 24.3 f) $-8(x+3)(3x+1)$ 24.10 c) 999 984
- 24.4 a) $5(x-3)(x+1)$ 24.11 a) $(n+1)(n+3)$
- 24.4 b) $(x+1)(7x-17)$ 24.11 b) non
- 24.4 c) $(x+1)(3x-2)$ 24.12 oui
- 24.5 a) $2(x+5)(x-3)$ 24.13 a) $(2-z)(2+z)(x+y)$
- 24.5 b) $2(x+2)(2x-1)$ 24.13 b) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
- 24.5 c) $(x-2)(-3x+10)$ 24.13 c) $\left((x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\right)^2$
- 24.6 a) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ 24.13 d) $4(x+4)(2x-1)$
- 24.6 b) $\frac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{5}$ 24.14 a) $3(5x+1)(2x-1)$
- 24.6 c) $(x+\sqrt{2})^2$ 24.14 b) $2(2x-1)(2x+1)$
- 24.6 d) $2(x-\sqrt{3})^2$ 24.14 c) $-(2x-1)(9x+2)$

Corrigés

24.1 a) On a $2x + 2 \times 3 = 2(x + 3)$.

24.1 c) On a $x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$.

24.2 a) On a $(3x + 1)(-4x + 2 - 3x - 1) = (3x + 1)(-7x + 1)$.

24.2 b) On a :

$$\begin{aligned}(2x - 7)^2 + (3 - 4x)(2x - 7) &= (2x - 7)(2x - 7 + 3 - 4x) = (2x - 7)(-2x - 4) \\ &= (2x - 7) \times -2(x + 2) = -2(2x - 7)(x + 2).\end{aligned}$$

24.2 c) On a $(x - 5)^2 - (x - 5) = (x - 5)(x - 5 - 1) = (x - 5)(x - 6)$.

24.2 d) On a $(5x - 1)^2 - (2 - 10x)(x + 3) = (5x - 1)^2 - 2(1 - 5x)(x + 3)$. Comme $1 - 5x = -(5x - 1)$, on a :

$$\begin{aligned}(5x - 1)^2 - 2(1 - 5x)(x + 3) &= (5x - 1) + 2(5x - 1)(x + 3) \\ &= (5x - 1)(5x - 1 + 2(x + 3)) = (5x - 1)(7x + 5).\end{aligned}$$

24.3 a) On a $x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 = (x + 7)^2$.

24.3 b) On a $4(x^2 + 8x + 16) = 4(x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2) = 4(x + 4)^2$.

24.3 c) On a $x^2 - 18x + 81 = x^2 - 2 \times x \times 9 + 9^2 = (x - 9)^2$.

24.3 d) On a $(3x - 7)^2 - 4^2 = (3x - 7 - 4)(3x - 7 + 4) = (3x - 11)(3x - 3) = (3x - 11) \times 3(x - 1) = 3(3x - 11)(x - 1)$.

24.3 e) On a $(6x)^2 - 2 \times 6x \times 5 + 5^2 = (6x - 5)^2$.

24.3 f) On a :

$$\begin{aligned}(x - 5)^2 - (5x + 7)^2 &= (x - 5 - (5x + 7))(x - 5 + 5x + 7) = (-4x - 12)(6x + 2) \\ &= -4(x + 3) \times 2(3x + 1) = -8(x + 3)(3x + 1).\end{aligned}$$

24.4 a) On a $5((x - 1)^2 - 4) = 5((x - 1 - 2)(x - 1 + 2)) = 5(x - 3)(x + 1)$.

24.4 b) On a :

$$\begin{aligned}2(x - 1)(x + 1) + 5(x - 1)^2 - 20 &= 2(x - 1)(x + 1) + 5(x - 3)(x + 1) \\ &= (x + 1)(2x - 2 + 5x - 15) = (x + 1)(7x - 17).\end{aligned}$$

24.4 c) D'une part, on a $2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) = 2(x - 1)(x + 1)$. D'autre part, on a $x^2 + x = x(x + 1)$.

Ainsi, on a $2x^2 - 2 + x^2 + x = 2(x - 1)(x + 1) + x(x + 1) = (x + 1)(2(x - 1) + x) = (x + 1)(3x - 2)$.

24.5 a) On a $(x + 5)(x - 5) + (x - 1)(x + 5) = (x + 5)(x - 5 + x - 1) = (x + 5)(2x - 6) = 2(x + 5)(x - 3)$.

24.5 b) On a $(x + 2)^2 - 3(x + 2)(1 - x) - (x + 2) = (x + 2)(4x - 2) = 2(x + 2)(2x - 1)$.

24.5 c) On a :

$$\begin{aligned}2(x-2)(x+1) + x^2 - 4 - 3(1-x)(4-2x) &= 2(x-2)(x+1) + (x-2)(x+2) - 3(1-x) \times (-2)(x-2) \\&= 2(x-2)(x+1) + (x-2)(x+2) + 6(1-x)(x-2) \\&= (x-2)(2(x+1) + x+2 + 6(1-x)) \\&= (x-2)(-3x+10).\end{aligned}$$

24.6 a) On a $x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

24.6 b) On a $\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{5}} - 1\right)\left(\frac{x}{\sqrt{5}} + 1\right) = \left(\frac{x - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}{5}$.

24.6 c) On a $x^2 + 2 \times x \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (x + \sqrt{2})^2$.

24.6 d) On a $2(x^2 - 2\sqrt{3}x + 3) = 2(x^2 - 2 \times x \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2) = 2(x - \sqrt{3})^2$.

24.7 a) On a $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$.

24.7 b) On a $x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2+3x+9)$.

24.7 d) On a $(x^3)^3 - 1 = (x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1) = (x-1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$.

24.8 a) On a $x^2 - 4x + 4 - 1 = (x-2)^2 - 1 = (x-2-1)(x-2+1) = (x-3)(x-1)$.

24.8 b) On a :

$$\begin{aligned}4x^2 + 24x + 36 - 9 &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 6 + 6^2 - 9 = (2x+3)^2 - 3^2 \\&= (2x+6-3)(2x+6+3) = (2x+3)(2x+9).\end{aligned}$$

24.9 a) On a $\frac{(x-3)^2 + (x-3)(x+3)}{x-3} = \frac{(x-3)(x-3+x+3)}{x-3} = x-3+x+3 = 2x$.

24.9 c) On a $\frac{-(2x+3) + (x-2)(2x+3)}{(2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2} = \frac{(2x-3)(-1+x-2)}{(2x+3)^2} = \frac{(2x+3)(x-3)}{(2x+3)^2} = \frac{x-3}{2x+3}$.

24.9 d) On a $\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x+1)(x+2)(x^2+1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-1}{x+2}$.

24.10 a) On a $35 \times (215 + 785) = 35 \times 1\,000 = 35\,000$.

24.10 b) On a $(10\,001 - 9\,999)(10\,001 + 9\,999) = 2 \times 20\,000 = 40\,000$.

24.10 c) On a $(1\,000 - 4)(1\,000 + 4) = 1\,000^2 - 4^2 = 1\,000\,000 - 16 = 999\,984$.

24.11 a) On a $n^2 + 4n + 3 = n^2 + 4n + 4 - 1 = (n+2)^2 - 1 = (n+1)(n+3)$.

24.11 b) On a $n^2 + 4n + 3 = (n+1)(n+3)$. Or, comme $n \geq 2$, on a $n+1 > 1$ et $n+3 > 1$. Ainsi, ce sont deux diviseurs stricts de $n^2 + 4n + 3$. Par conséquent, notre entier ne peut pas être premier.

24.12 On a $12^{52} + 12^{53} = 12^{52} \times (1 + 12) = 12^{52} \times 13 = 12^{51} \times 3 \times 4 \times 13 = 12^{51} \times 3 \times 52$.

24.13 a) On a $4(x + y) - z^2(x + y) = (4 - z^2)(x + y) = (2 - z)(2 + z)(x + y)$.

24.13 b) On a :

$$\begin{aligned}(x^4)^2 - 1^2 &= (x^4 - 1)(x^4 + 1) = ((x^2)^2 - 1^2)(x^4 + 1) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1).\end{aligned}$$

24.13 c) On a $(x^2)^2 - 2 \times x^2 \times 2 + 2^2 = (x^2 - 2)^2 = (x^2 - (\sqrt{2})^2)^2 = ((x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}))^2$.

24.13 d) On a $(3(x + 1))^2 - (x - 5)^2 = (3x + 3 - x + 5)(3x + 3 + x - 5) = (2x + 8)(4x - 2) = 4(x + 4)(2x - 1)$.

24.14 a) On a $(5x + 1)(6x - 3) = (5x + 1) \times 2(2x - 1) = 2(5x - 1)(2x - 1)$.

24.14 b) On a $2(4x^2 - 1) = 2(2x - 1)(2x + 1)$.

24.14 c) On a :

$$\begin{aligned}(2x - 1)^2 - 3(5x + 1)(2x - 1) + 2(2x - 1)(2x + 1) &= (2x - 1)(2x - 1 - 15x - 3 + 4x + 2) \\ &= (2x - 1)(-9x - 2) = -(2x - 1)(9x + 2).\end{aligned}$$

Fiche n° 25. Tableaux de signes et inéquations I

Réponses

25.1 a) voir corrigé

25.1 b) voir corrigé

25.1 c) voir corrigé

25.2 (a)

25.3 a) $] -\infty, -9[\cup] 6, +\infty[$

25.3 b) $\left[-\frac{7}{5}, \frac{3}{4} \right]$

25.3 c) $] -\infty, -9[\cup \left] \frac{7}{2}, 5[$

25.4 a) $[-17, -11[$

25.4 b) $\left] -\infty, -\frac{2}{3}[\cup \left] \frac{5}{7}, +\infty[$

25.4 c) .. $] -\infty, -4] \cup] -2, +\infty[$

25.4 d) $\left[\frac{3}{2}, 4 \right] \cup] 5, +\infty[$

25.5 a) $\left] -\frac{2}{3}, \frac{5}{7} \right]$

25.5 b) $\emptyset$

25.6 a) $(x - 1)^2$

25.6 b) $] -\infty, +\infty[$

25.7 a) $\left] -8, \frac{2}{3} \right]$

25.7 b) $] -\infty, -1] \cup [0, 1]$

25.7 c) ... $] -\infty, -10] \cup [4, +\infty[$

Corrigés

25.1 a) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$	
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	
$(x - 2)(x + 3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

25.1 b) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-10	7	$+\infty$	
$7 - x$	$+$	$+$	0	$-$	
$10 + x$	$-$	0	$+$	$+$	
$(7 - x)(10 + x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

25.1 c) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$2x - 3$	$-$	$-$	0	$+$	
$7x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	
$(2x - 3)(7x + 4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

25.3 a) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-9	6	$+\infty$	
$9 + x$	$-$	0	$+$	$+$	
$6 - x$	$+$		0	$-$	
$(9 + x)(6 - x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $]-\infty, -9[\cup]6, +\infty[$.

25.3 b) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$	
$3 - 4x$	$+$	$+$	0	$-$	
$5x + 7$	$-$	0	$+$	$+$	
$(3 - 4x)(5x + 7)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{7}{5}, \frac{3}{4}\right]$.

25.3 c) On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-9	$\frac{7}{2}$	5	$+\infty$		
$2x - 7$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$x + 9$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$5 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$		
$(2x - 7)(x + 9)(5 - x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $]-\infty, -9[\cup \left] \frac{7}{2}, 5[$.

25.4 a) On remarque que cette inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-11\}$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-17	-11	$+\infty$
$x + 17$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 11$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x + 17}{x + 11}$	$+$	0	$-$	$+$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $[-17, -11[$.

25.4 b) On remarque que cette inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$. On a le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$+\infty$
$5 - 7x$	+	+	0	-
$3x + 2$	-	+	0	+
$\frac{5 - 7x}{3x + 2}$	-	+	0	-

On en déduit que l'ensemble des solutions est $]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]\frac{5}{7}, +\infty[$.

25.5 a) Cette inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{9-x}{3x+2} \geq 2 \iff \frac{9-x}{3x+2} - 2 \geq 0 \iff \frac{9-x}{3x+2} - \frac{2(3x+2)}{3x+2} \geq 0 \iff \frac{5-7x}{3x+2} \geq 0.$$

Donc, l'ensemble des solutions, après avoir dressé un tableau de signes (qu'on ne fait pas ici), est $]-\frac{2}{3}, \frac{5}{7}[$.

25.5 b) On a les équivalences suivantes : $-1 + \frac{1}{1+x^2} > 0 \iff \frac{-1-x^2}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} > 0 \iff \frac{-x^2}{1+x^2} > 0$.

Or, pour tout réel x , $1+x^2 > 0$ et $-x^2 \leq 0$. Donc, l'inéquation n'a pas de solution.

25.6 a) On a $A(x) = (x-1)(x+2) - 3(x-1) = (x-1)[(x+2)-3] = (x-1)^2$.

25.6 b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (x-1)(x+2) \geq 3(x-1) &\iff (x-1)(x+2) - 3(x-1) \geq 0 \\ &\iff (x-1)^2 \geq 0 \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

Comme le carré d'un réel est toujours positif, l'inégalité $(x-1)^2 \geq 0$ est toujours vraie. Donc, l'ensemble des solutions est $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

25.7 a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (x+8)(1-x) > (2x-1)(x+8) &\iff (x+8)(1-x) - (2x-1)(x+8) > 0 \\ &\iff (x+8)[(1-x) - (2x-1)] > 0 \iff (x+8)(2-3x) > 0. \end{aligned}$$

Après avoir dressé le tableau de signes, on obtient comme ensemble des solutions $]-8, \frac{2}{3}[$.

25.7 b) On a les équivalences suivantes :

$$x^3 - x \leq 0 \iff x(x^2 - 1) \leq 0 \iff x(x-1)(x+1) \leq 0.$$

Après avoir dressé le tableau de signes, on obtient comme ensemble des solutions $]-\infty, -1] \cup [0, 1]$.

25.7 c) On a les équivalences suivantes :

$$49 - (3+x)^2 \leq 0 \iff [7 - (3+x)][7 + (3+x)] \leq 0 \iff (4-x)(10+x) \leq 0.$$

Après avoir dressé le tableau de signes, on obtient comme ensemble des solutions $]-\infty, -10] \cup [4, +\infty[$.

Fiche n° 26. Inéquations du premier degré

Réponses

26.1 a).....	☐ oui	26.3 d).....	$\left] -\infty, -\frac{22}{5} \right[$	26.5 c).....	$\left] \frac{5}{16}, +\infty \right[$
26.1 b).....	☐ non	26.4 a).....	$\left] -\infty, 5 \right[$	26.5 d).....	$\emptyset$
26.2 a).....	$\left] -\infty, -7 \right[$	26.4 b).....	$\left] -\infty, \frac{3}{2} \right[$	26.6 a).....	$\left] -\infty, \frac{a-3}{a} \right[$
26.2 b).....	$\left] -\infty, 10 \right[$	26.4 c).....	$\left] -\infty, -\frac{3}{4} \right[$	26.6 b).....	$\left] -\infty, \frac{a+7}{a} \right[$
26.2 c).....	$\left] -\infty, \frac{23}{28} \right[$	26.4 d).....	$\left] -\infty, -\frac{581}{86} \right[$	26.6 c)....	$\left[\frac{7+a}{2a}, +\infty \right[\setminus \{0\}$
26.2 d).....	$\left] -\infty, -\frac{37}{6} \right[$	26.5 a).....	$\left] -\infty, \frac{7}{3} \right[$	26.6 d).....	$\left] 0, +\infty \right[$
26.3 a).....	$\left] -3, +\infty \right[$	26.5 b).....	$\left] -\infty, -1 \right[$	26.7 a).....	$\left] -\infty, 1 \right[$
26.3 b).....	$\left] \frac{5}{7}, +\infty \right[$	26.7 b).....	$\left[\frac{1}{5}, +\infty \right[$		
26.3 c).....	$\left] -\infty, \frac{23}{8} \right[$				

Corrigés

- 26.1 a)** L'inéquation revient à $\frac{30}{21} \leq \frac{37}{21}$, ce qui est vrai (on peut aussi résoudre l'inéquation et trouver $x \leq 1$).
- 26.1 b)** L'inéquation revient à $\frac{4}{3} < \frac{-2}{3}$, ce qui est faux.
- 26.2 a)** On ajoute -5 à chaque membre de l'inéquation, ce qui ne change pas le sens de celle-ci.
- 26.2 b)** On ajoute 7 à chaque membre de l'inéquation, ce qui ne change pas le sens de celle-ci.
- 26.2 c)** On ajoute $\frac{5}{4}$ à chaque membre de l'inéquation, ce qui ne change pas le sens de celle-ci.
- 26.2 d)** On ajoute $-\frac{2}{3}$ à chaque membre de l'inéquation, ce qui ne change pas le sens de celle-ci.
- 26.3 a)** Après avoir soustrait 4 à chaque membre de l'inéquation, on obtient $3x \geq -9$. Puis, on divise chaque membre par 3 , qui est un nombre positif, ce qui donne $x \geq -3$.
- 26.3 b)** Après avoir soustrait 2 à chaque membre de l'inéquation, celle-ci revient à $-7x < -5$. Puis, on divise par -7 , qui est un nombre négatif, ce qui donne $x > \frac{5}{7}$.
- 26.4 a)** On ajoute $-4x + 3$ à chaque membre de l'inéquation, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité.

26.4 b) On ajoute $-5x + 4$ à chaque membre de l'inéquation, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité. On obtient alors l'inéquation $-2x > -3$; puis, on divise chaque membre par -2 , ce qui va changer le sens de l'inégalité et donner $x < \frac{3}{2}$.

26.4 c) Après développement, on obtient $6x + 3 < -6x - 6$; on additionne $6x - 3$ à chaque membre et on obtient $12x < -9$. On peut ensuite diviser par 12, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité, et donne $x < -\frac{3}{4}$.

26.5 a) On peut simplifier en ajoutant $3x^2$ à chaque membre de l'inéquation, ce qui nous ramène à une inéquation du premier degré. On ajoute de même $2x + 3$ afin d'obtenir $3x \leq 7$, puis on divise par 3.

26.5 b) On développe les carrés pour obtenir $x^2 - 10x + 25 > x^2 + 14x + 49$. On peut ensuite simplifier en ajoutant $-x^2$ et ainsi obtenir une inéquation de degré 1.

26.5 c) On développe les carrés pour obtenir $4x^2 - 12x + 9 > 4x^2 + 4x + 4$. On peut ensuite simplifier en ajoutant $-4x^2$ et ainsi obtenir une inéquation de degré 1.

26.5 d) Après avoir développé, l'inéquation obtenue est $6x^2 + 30 < 6x^2 + 30$, ce qui revient à $0 < 0$. C'est impossible. On remarquera que l'inéquation $3(2x^2 + 10) \leq 6(x^2 + 5)$ aurait eu une infinité de solutions.

26.6 a) L'inéquation est équivalente à $ax \geq a - 3$; on divise par a , qui est négatif. Donc, on change le sens de l'inégalité. On obtient $x \leq \frac{a-3}{a}$.

26.6 b) Après avoir ajouté -7 à chaque membre de l'inéquation, on divise par $-a$, qui est un nombre strictement positif car a est strictement négatif. On obtient $x < \frac{a+7}{a}$.

26.6 c) Cette inéquation n'est pas définie pour $x = 0$.

Pour $x \neq 0$, l'inéquation est équivalente à $-2ax + a \geq -7$. Après avoir ajouté $-a$, on doit effectuer la division par $-2a$, qui est un nombre positif. On ne changera donc pas le sens de l'inégalité. Dans la réponse, suivant la valeur de a , il se peut que 0 ne soit pas dans l'intervalle $\left[\frac{7+a}{2a}, +\infty\right[$.

26.6 d) On développe et on obtient $-18x^2 - 12ax < -18x^2 - 36ax$. On additionne $18x^2$ à chaque membre, ce qui nous ramène à une inéquation du premier degré. Après addition de $36ax$, l'inéquation devient $24ax < 0$. On divise ensuite par $24a$, qui est un nombre négatif, ce qui change le sens de l'inégalité. On obtient $x > 0$.

26.7 a) On multiplie par 12 chaque membre de l'inéquation pour obtenir $9x + 3 > 10x + 2$. On additionne alors $-10x - 3$ à chaque membre de l'inéquation, qui devient $-x > -1$. La division par -1 change le sens de l'inégalité.

26.7 b) On multiplie par 12 chaque membre de l'inéquation pour obtenir $(3 - 3x) - (18x - 12) \leq 4x + 10$. On réduit le membre de gauche pour obtenir $-21x + 15 \leq 4x + 10$. On additionne alors $-4x - 15$ à chaque membre de l'inéquation, qui devient $-25x \leq -5$. La division par -25 change le sens de l'inégalité.

Fiche n° 27. Inégalités et valeurs absolues

Réponses

27.1	$\boxed{c}$	27.3 b)	$\boxed{-9 \leq x \leq 1}$	27.5	$\boxed{c}$
27.2 a)	$\boxed{2 \text{ et } 4}$	27.3 c)	$\boxed{-1 \leq x \leq 4}$	27.6	$\boxed{b}$
27.2 b)	$\boxed{-5 \text{ et } \frac{11}{3}}$	27.3 d)	$\boxed{-7 \leq x \leq 3}$	27.7 a)	$\boxed{ x - 1 \leq 3}$
27.2 c)	$\boxed{-3}$	27.4 a)	$\boxed{[2, 4]}$	27.7 b)	$\boxed{ x + 4,5 \leq 2,5 \text{ ou } 2x + 9 \leq 5}$
27.3 a)	$\boxed{2 \leq x \leq 4}$	27.4 b)	$\boxed{[-12, 2]}$		
		27.4 c)	$\boxed{\{6\}}$		

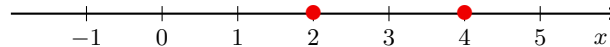
Corrigés

27.1 On voit que l'intervalle a pour milieu 1 et rayon 2 ; donc, l'équation $|x - 1| = 2$ convient.

27.2 a) On a les équivalences suivantes :

$$|x - 3| = 1 \iff (x - 3 = -1 \text{ ou } x - 3 = 1) \iff (x = 2 \text{ ou } x = 4).$$

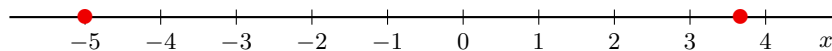
Les solutions sont donc 2 et 4 ; les voici représentées sur l'axe réel :



27.2 b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |3x + 2| = 13 &\iff (3x + 2 = -13 \text{ ou } 3x + 2 = 13) \iff (3x = -15 \text{ ou } 3x = 11) \\ &\iff \left(x = -5 \text{ ou } x = \frac{11}{3}\right). \end{aligned}$$

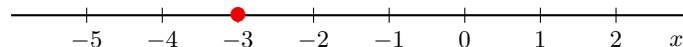
Les solutions sont donc -5 et $\frac{11}{3}$; les voici représentées sur l'axe réel :



27.2 c) On a les équivalences suivantes :

$$|7x + 21| = 0 \iff 7x + 21 = 0 \iff 7x = -21 \iff x = -3.$$

La solution est donc -3 ; la voici représentée sur l'axe réel :



27.3 a) On a les équivalences suivantes :

$$|x - 3| \leq 1 \iff -1 \leq x - 3 \leq 1 \iff 2 \leq x \leq 4.$$

27.3 b) On a les équivalences suivantes :

$$|x + 4| \leq 5 \iff -5 \leq x + 4 \leq 5 \iff -9 \leq x \leq 1.$$

.....

27.3 c) On a les équivalences suivantes :

$$|2x - 3| \leq 5 \iff -5 \leq 2x - 3 \leq 5 \iff -2 \leq 2x \leq 8 \iff -1 \leq x \leq 4.$$

.....

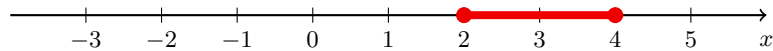
27.3 d) On a les équivalences suivantes :

$$|5x + 10| \leq 25 \iff -25 \leq 5x + 10 \leq 25 \iff -35 \leq 5x \leq 15 \iff -7 \leq x \leq 3.$$

.....

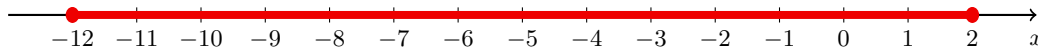
27.4 a) On a les équivalences suivantes : $|x - 3| \leq 1 \iff -1 \leq x - 3 \leq 1 \iff 2 \leq x \leq 4$.

Donc, l'ensemble des solutions est $[2, 4]$, qu'on représente par :

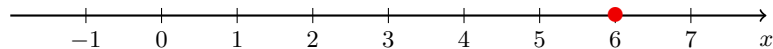


27.4 b) On a les équivalences suivantes : $|x + 5| \leq 7 \iff -7 \leq x + 5 \leq 7 \iff -12 \leq x \leq 2$.

Donc l'ensemble des solutions est $[-12, 2]$, ce qu'on représente par :



27.4 c) On sait que $|x - 6| \leq 0 \iff |x - 6| = 0 \iff x - 6 = 0 \iff x = 6$: l'ensemble de solutions est $\{6\}$, ce qu'on représente par :



27.5 On a les équivalences suivantes :

$$|2x + 5| \leq 7 \iff -7 \leq 2x + 5 \leq 7 \iff -12 \leq 2x \leq 2 \iff -6 \leq x \leq 1.$$

.....

27.6 On a les équivalences suivantes :

$$|6 - 3x| \leq 9 \iff -9 \leq 6 - 3x \leq 9 \iff -15 \leq -3x \leq 3 \iff -1 \leq x \leq 5.$$

.....

27.7 a) Pour déterminer une inéquation qui admet l'intervalle donné pour ensemble des solutions, il faut déterminer le centre de l'intervalle et son rayon.

Dans le cas présent, on voit que l'intervalle des solutions est $[-2, 4]$, dont le milieu est $\frac{-2 + 4}{2} = 1$ et le rayon est $\frac{4 - (-2)}{2} = 3$. Donc, l'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres situés à une distance inférieure ou égale à 3 du nombre 1, ce qui se traduit par l'inéquation $|x - 1| \leq 3$.

.....

27.7 b) On voit que l'intervalle des solutions est $[-7, -2]$, dont le milieu est $\frac{-7 + (-2)}{2} = -4,5$ et le rayon est $\frac{-2 - (-7)}{2} = 2,5$. Donc, l'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres situés à une distance inférieure ou égale à 2,5 du nombre $-4,5$, ce qui se traduit par l'inéquation $|x - (-4,5)| \leq 2,5$, donc $|x + 4,5| \leq 2,5$. On peut remarquer que l'inéquation $|2x + 9| \leq 5$ convient également.

.....

Fiche n° 28. Manipulation d'inégalités

Réponses

28.1 a)	$[-15, +\infty[$	28.2 e)	$[1, 3[$	28.4 c)	$1 \leq \frac{-4}{x+2} \leq 4$
28.1 b)	$] -\infty, 11]$	28.2 f)	$[-6, 4]$	28.5 a)	$-1 \leq 2x + 3y \leq 12$
28.1 c)	$[4, +\infty[$	28.3 a)	$x \in [-2, 3]$	28.5 b) ..	$-29 \leq 5z + 3t \leq -10$
28.1 d)	$[-6, +\infty[$	28.3 b)	$x \in [-1, 3[$	28.6 a) ..	$-3 \leq -2x + 3y \leq 10$
28.1 e)	$[4, +\infty[$	28.3 c)	$x \in \left] -\frac{23}{2}, \frac{77}{2} \right[$	28.6 b) ...	$-20 \leq 5z - 3t \leq -1$
28.1 f)	$]7, +\infty[$	28.3 d)	$x \in \left[-\frac{3}{28}, \frac{1}{3} \right[$	28.7 a)	$8 \leq xy \leq 21$
28.2 a)	$[-3, 4]$	28.4 a)	$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$	28.7 b)	$-6 \leq zt \leq -2$
28.2 b)	$[5, 13[$	28.4 b)	$\frac{-3}{5} \leq \frac{-3}{x} \leq \frac{-1}{3}$	28.7 c)	$-6 \leq uv \leq 12$
28.2 c)	$] -2, 3[$			28.8 a)	$\frac{2}{7} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{4}$
28.2 d)	$\left[0, \frac{2}{3} \right[$			28.8 b)	$\frac{1}{6} \leq \frac{z}{t} \leq \frac{2}{3}$

Corrigés

28.1 a) On a les équivalences suivantes : $x + 3 \geq -12 \iff x \geq -15 \iff x \in [-15, +\infty[$.

28.1 b) On a les équivalences suivantes : $x - 5 \leq 6 \iff x \leq 11 \iff x \in]-\infty, 11]$.

28.1 c) On a les équivalences suivantes : $3x > 12 \iff x > \frac{12}{3} \iff x > 4 \iff x \in]4, +\infty[$.

28.1 d) On a les équivalences suivantes : $-4x \leq 24 \iff x \geq \frac{24}{-4} \iff x \geq -6 \iff x \in [-6, +\infty[$.

28.1 e) On a les équivalences suivantes : $5x - 7 \geq 13 \iff 5x \geq 20 \iff x \geq 4 \iff x \in [4, +\infty[$.

28.1 f) On a les équivalences suivantes : $4 - 7x < -45 \iff -7x < -49 \iff x > 7 \iff x \in]7, +\infty[$.

28.2 a) On a les équivalences suivantes :

$$-2 \leq x + 1 \leq 5 \iff -2 + (-1) \leq x + 1 + (-1) \leq 5 + (-1) \iff -3 \leq x \leq 4 \iff x \in [-3, 4].$$

28.2 b) On a les équivalences suivantes :

$$3 \leq x - 2 < 11 \iff 3 + 2 \leq x - 2 + 2 < 11 + 2 \iff 5 \leq x < 13 \iff x \in [5, 13[.$$

28.2 c) On a les équivalences suivantes :

$$12 > 4x > -8 \iff \frac{12}{4} > \frac{4x}{4} > \frac{-8}{4} \iff 3 > x > -2 \iff x \in]-2, 3[.$$

28.2 d) On a les équivalences suivantes :

$$-4 < -6x \leq 0 \iff \frac{-4}{-6} > \frac{-6x}{-6} \geq \frac{0}{-6} \iff \frac{2}{3} > x \geq 0 \iff x \in \left[0, \frac{2}{3}\right[.$$

28.2 e) On a les équivalences suivantes : $5 > 2x - 1 \geq 1 \iff 6 > 2x \geq 2 \iff 3 > x \geq 1 \iff x \in [1, 3[.$

28.2 f) On a les équivalences suivantes :

$$-17 \leq 3 - 5x \leq 33 \iff -20 \leq -5x \leq 30 \iff 4 \geq x \geq -6 \iff x \in [-6, 4].$$

28.3 a) On a les équivalences suivantes : $-3 \leq x - 1 \leq 2 \iff -3 + 1 \leq x - 1 + 1 \leq 2 + 1 \iff -2 \leq x \leq 3.$

28.3 b) On a les équivalences suivantes :

$$x + 2 \in [1, 5[\iff 1 \leq x + 2 < 5 \iff 1 + (-2) \leq x + 2 + (-2) < 5 + (-2) \iff -1 \leq x < 3.$$

28.3 c) On a les équivalences suivantes :

$$2x - 3 \in]-26, 74[\iff -26 < 2x - 3 < 74 \iff -23 < 2x < 77 \iff \frac{-23}{2} < x < \frac{77}{2}.$$

28.3 d) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} -7x + 3 \in \left] \frac{2}{3}, \frac{15}{4} \right] &\iff \frac{2}{3} < -7x + 3 \leq \frac{15}{4} \iff \frac{-7}{3} < -7x \leq \frac{3}{4} \\ &\iff \frac{-7}{3} \times \frac{1}{-7} < \frac{-7x}{-7} \leq \frac{3}{4} \times \frac{1}{-7} \iff \frac{1}{3} > x \geq -\frac{3}{28}. \end{aligned}$$

28.4 a) On a les équivalences suivantes :

$$x \in [2, 3] \iff 2 \leq x \leq 3 \iff \frac{1}{2} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{3} \iff \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}.$$

28.4 b) On a les équivalences suivantes :

$$x \in [5, 9] \iff 5 \leq x \leq 9 \iff \frac{1}{5} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{9} \iff \frac{-3}{5} \leq \frac{-3}{x} \leq \frac{-1}{3}.$$

28.4 c) On a les équivalences suivantes :

$$x \in [-6, -3] \iff -6 \leq x \leq -3 \iff -4 \leq x + 2 \leq -1 \iff \frac{1}{-4} \geq \frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{-1} \iff 1 \leq \frac{-4}{x+2} \leq 4.$$

28.5 a) On a les équivalences suivantes :

$$x \in [-2, 3] \iff -2 \leq x \leq 3 \iff -4 \leq 2x \leq 6 \quad \text{et} \quad y \in [1, 2] \iff 1 \leq y \leq 2 \iff 3 \leq 3y \leq 6.$$

Par addition membre à membre, on obtient $-4 + 3 \leq 2x + 3y \leq 6 + 6$ et donc $-1 \leq 2x + 3y \leq 12$.

28.5 b) On a les équivalences suivantes :

$$z \in [-4, -2] \iff -4 \leq z \leq -2 \iff -20 \leq 5z \leq -10 \quad \text{et} \quad t \in [-3, 0] \iff -3 \leq t \leq 0 \iff -9 \leq 3t \leq 0.$$

Par addition membre à membre, on obtient $-20 + (-9) \leq 5z + 3t \leq -10 + 0$ et donc $-29 \leq 5z + 3t \leq -10$.

28.6 a) On a les équivalences suivantes :

$$x \in [-2, 3] \iff -2 \leq x \leq 3 \iff -6 \leq -2x \leq 4 \quad \text{et} \quad y \in [1, 2] \iff 1 \leq y \leq 2 \iff 3 \leq 3y \leq 6.$$

Par addition membre à membre, on obtient $-6 + 3 \leq -2x + 3y \leq 4 + 6$ et donc $-3 \leq -2x + 3y \leq 10$.

28.6 b) On a les équivalences suivantes :

$$z \in [-4, -2] \iff -4 \leq z \leq -2 \iff -20 \leq 5z \leq -10 \quad \text{et} \quad t \in [-3, 0] \iff -3 \leq t \leq 0 \iff 0 \leq -3t \leq 9.$$

Par addition membre à membre, on obtient $-20 + 0 \leq 5z + (-3t) \leq -10 + 9$ et donc $-20 \leq 5z - 3t \leq -1$.

28.7 a) On a les équivalences $x \in [2, 3] \iff 2 \leq x \leq 3$ et $y \in [4, 7] \iff 4 \leq y \leq 7$. Par produit membre à membre, les bornes étant positives, on obtient $2 \times 4 \leq xy \leq 3 \times 7$ et donc $8 \leq xy \leq 21$.

28.7 b) On a les équivalences $z \in [-3, -2] \iff -3 \leq z \leq -2$ et $t \in [1, 2] \iff 1 \leq y \leq 2$.

Par lecture des bornes, il faut déterminer la plus petite et la plus grande des valeurs qu'il est possible d'obtenir par produit, ce qui donne ici $-3 \times 2 \leq zt \leq -2 \times 1$ et donc $-6 \leq zt \leq -2$.

28.7 c) On a les équivalences $u \in [-1, 2] \iff -1 \leq u \leq 2$ et $v \in [3, 6] \iff 3 \leq v \leq 6$.

Par lecture des bornes, il faut déterminer la plus petite et la plus grande des valeurs qu'il est possible d'obtenir par produit, ce qui donne ici $-1 \times 6 \leq uv \leq 2 \times 6$ et donc $-6 \leq uv \leq 12$.

28.8 a) On a les équivalences suivantes :

$$x \in [2, 3] \iff 2 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad y \in [4, 7] \iff 4 \leq y \leq 7 \iff \frac{1}{7} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{4}.$$

Par produit membre à membre, les bornes étant positives, on obtient $2 \times \frac{1}{7} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 3 \times \frac{1}{4}$ et donc $\frac{2}{7} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{4}$.

28.8 b) On a les équivalences suivantes :

$$z \in [-2, -1] \iff -2 \leq z \leq -1 \quad \text{et} \quad t \in [-6, -3] \iff -6 \leq t \leq -3 \iff \frac{-1}{3} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{-1}{6}.$$

Par lecture des bornes, il faut déterminer la plus petite et la plus grande des valeurs qu'il est possible d'obtenir par produit, ce qui donne ici $-1 \times \frac{-1}{6} \leq z \times \frac{1}{t} \leq -2 \times \frac{-1}{3}$ et donc $\frac{1}{6} \leq \frac{z}{t} \leq \frac{2}{3}$.

Fiche n° 29. Tableaux de signes et inéquations II

Réponses

29.1 voir corrigé

29.2 a) négatif

29.2 b) positif

29.2 c) négatif

29.2 d) 0

29.2 e) non défini

29.3 a) voir corrigé

29.3 b) $\left] -\frac{3}{7}, \frac{4}{5} \right[$

29.3 c) $\left] -\infty, -\frac{3}{7} \right[\cup \left[\frac{4}{5}, +\infty \right[$

29.4 a) $] -\infty, -5] \cup \left[-\frac{7}{2}, +\infty \right[$

29.4 b) $\left] \frac{4}{3}, \frac{5}{2} \right[$

29.5 a) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-13}{5} \right\}$

29.5 b) $\left] -\infty, -\frac{13}{5} \right[\cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{3} \right[$

29.6 a) $\left] -\infty, -\frac{1}{3} \right[\cup \left[-\frac{1}{5}, +\infty \right[$

29.6 b) $\left] -5, \frac{5}{4} \right[$

29.6 c) $\left] -\infty, -\frac{1}{4} \right[\cup \left[\frac{1}{5}, +\infty \right[$

Corrigés

29.1 On a :

x	-5	-4	-2	1	3	4	
$f(x)$	+	0	-	0	-	0	+

29.2 a) On remarque que $-3 \in [-4, -2]$, où f est négative.

29.2 b) On remarque que $-3 \in [-4, -1]$, où g est positive.

29.2 e) Comme $f(-2)$ est nul, il s'agirait d'une division par zéro : l'expression n'est pas définie.

29.3 a) On a les équivalences suivantes :

$$-5x + 4 > 0 \iff -5x > -4 \iff x < \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad 7x + 3 > 0 \iff 7x > -3 \iff x > \frac{-3}{7}.$$

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$	
$-5x + 4$	$+$	$+$	0	$-$	
$7x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	
$(7x + 3)(-5x + 4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

29.3 b) On cherche les valeurs de x pour lesquelles le signe sur la dernière ligne du tableau est « + ». Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est $\left] -\frac{3}{7}, \frac{4}{5} \right[$.

29.3 c) On cherche les valeurs de x pour lesquelles le signe sur la dernière ligne du tableau est « - » ou « 0 ». Comme c'est un quotient, on fait attention à la valeur interdite $-3/7$.

29.4 a) On a les équivalences suivantes :

$$2x + 7 > 0 \iff x > -\frac{7}{2} \quad \text{et} \quad x + 5 > 0 \iff x > -5.$$

Comme $-5 < -\frac{7}{2}$, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	-5	$-\frac{7}{2}$	$+\infty$	
$2x + 7$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + 5$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est $]-\infty, -5] \cup \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right[$.

29.4 b) Le tableau de signes permettant de résoudre l'inéquation considérée est :

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$	
$-3x + 4$	+	0	-	-	
$-2x + 5$	+		+	0	-
$g(x)$	+	0	-	0	+

29.5 a) L'inéquation est définie si, et seulement si, $5x + 13 \neq 0$; c'est-dire, si, et seulement si, $x \neq -\frac{13}{5}$.

29.5 b) On a les équivalences suivantes :

$$2x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}, \quad -3x + 7 > 0 \iff x < \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad 5x + 13 > 0 \iff x > -\frac{13}{5}.$$

Comme $-\frac{13}{5} < -\frac{1}{2} < \frac{7}{3}$, on en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{13}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$	
$2x + 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$-3x + 7$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$5x + 13$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\frac{(2x+1)(-3x+7)}{5x+13}$	$+$	$-$	0	$+$	0	$-$

En prenant garde à la valeur interdite, on en déduit que l'ensemble des solutions cherché est $\left] -\infty, -\frac{13}{5} \right[\cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{3} \right]$.

29.6 a) On se ramène à une étude de signe et donc à l'étude d'une inéquation de la forme « $\cdots \geq 0$ ».

On a l'équivalence suivante :

$$(3x+1)(7x+4) \geq (3x+1)(-3x+2) \iff (3x+1)(7x+4) - (3x+1)(-3x+2) \geq 0.$$

De plus, en factorisant, on a :

$$(3x+1)(7x+4) - (3x+1)(-3x+2) = (3x+1)(10x+2).$$

Ainsi, on a l'équivalence suivante :

$$(3x+1)(7x+4) \geq (3x+1)(-3x+2) \iff (3x+1)(7x+4 - (-3x+2)) \geq 0 \iff (3x+1)(10x+2) \geq 0.$$

On procède ensuite comme précédemment, en établissant le tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{5}$	$+\infty$	
$(3x+1)(10x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

29.6 b) On se ramène à une étude de signe et donc à l'étude d'une inéquation de la forme « $\cdots < 0$ ».

On a l'équivalence suivante :

$$(x+5)^2 < (x+5)(-3x+10) \iff (x+5)^2 - (x+5)(-3x+10) < 0.$$

Puis, on factorise par $(x+5)$ pour se ramener à une inéquation produit nul. On obtient les équivalences suivantes :

$$(x+5)^2 < (x+5)(-3x+10) \iff (x+5)(x+5 - (-3x+10)) < 0 \iff (x+5)(4x-5) < 0.$$

Enfin, on dresse le tableau de signes de l'expression $(x+5)(4x-5)$:

x	$-\infty$	-5	$\frac{5}{4}$	$+\infty$	
$(x+5)(4x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$

29.6 c) L'inéquation est définie si, et seulement si, $x \neq -\frac{1}{4}$.

On se ramène à une étude de signe grâce aux équivalences suivantes :

$$\frac{2x+4}{4x+1} \leq \frac{7x+3}{4x+1} \iff \frac{2x+4}{4x+1} - \frac{7x+3}{4x+1} \leq 0 \iff \frac{-5x+1}{4x+1} \leq 0.$$

Puis, on dresse le tableau de signes de l'expression $\frac{-5x+1}{4x+1}$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$\frac{-5x+1}{4x+1}$	$-$	0	$+$	$-$

On en déduit que l'ensemble des solutions de $\frac{2x+4}{4x+1} \leq \frac{7x+3}{4x+1}$ est $\left] -\infty, -\frac{1}{4} \right[\cup \left[\frac{1}{5}, +\infty \right[$.

Fiche n° 30. Tableaux de signes et inéquations III

Réponses

- 30.1 a) $[-3, 2]$
- 30.1 b) $]1/2, 5[$
- 30.1 c) $[-4, 2[$
- 30.1 d) $] -\infty, -8[\cup [2/3, +\infty[$
- 30.2 a) $] -\infty, -1/5[\cup]1/2, +\infty[$
- 30.2 b) $[1, 8]$
- 30.2 c) $] -\infty, -2[\cup] -3/4, +\infty[$
- 30.3 a) $\frac{4x-5}{x-2}$
- 30.3 b) $] -\infty, 5/4[\cup]2, +\infty[$
- 30.4 a) $] -\infty, -9/5[\cup] -5/4, +\infty[$
- 30.4 b) $] -\infty, 2[\cup]5/2, +\infty[$
- 30.4 c) $] -\infty, 5/2[\cup]4, +\infty[$
- 30.4 d) $[8/7, 3/2[$
- 30.5 a) $\frac{x-2}{x(x+1)}$
- 30.5 b) $] -\infty, -1[\cup]0, 2[$
- 30.6 a) $] -3, 0[\cup [6, +\infty[$
- 30.6 b) $] -2, -4/5[\cup]0, +\infty[$
- 30.7 a) $[-5/2, 5/2]$
- 30.7 b) $] -\infty, -3/4[\cup]3/4, +\infty[$
- 30.7 c) $[-2, 4/3]$
- 30.7 d) $[-4/5, 4]$
- 30.8 a) $[-4, -1/2]$
- 30.8 b) $] -\infty, -6/5[\cup [4, +\infty[$
- 30.8 c) $] -\infty, -3/2[\cup [0, 3/2]$

Corrigés

30.1 a) On dresse le tableau de signes de l'expression $(x+3)(-3x+6)$; on a :

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$
$-3x + 6$	$+$	0	0	$-$
$(x + 3)(-3x + 6)$	$-$	0	0	$-$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x+3)(-3x+6) \geq 0$ est donc $[-3, 2]$.

30.1 c) On dresse le tableau de signes de l'expression $\frac{x+4}{7x-14}$; on a :

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$x+4$	-	0	+	+
$7x-14$	-	-	0	+
$\frac{x+4}{7x-14}$	+	0	-	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{x+4}{7x-14} \leq 0$ est donc $[-4, 2[$.

30.2 a) En factorisant par $1 - 2x$, on est amené à résoudre l'inéquation $(1 - 2x)(5x + 1) < 0$.

30.2 b) En factorisant par $x - 1$, on est amené à résoudre l'inéquation $(x - 1)(-x + 8) \geq 0$.

30.2 c) En factorisant par $4x + 3$, on est amené à résoudre l'inéquation $(4x + 3)(x + 2) > 0$.

30.3 a) On a $\frac{x+1}{x-2} + 3 = \frac{x+1}{x-2} + \frac{3(x-2)}{x-2} = \frac{x+1+3x-6}{x-2} = \frac{4x-5}{x-2}$.

30.4 a) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{3x+1}{4x+5} \leq 2 \iff \frac{3x+1}{4x+5} - \frac{2(4x+5)}{4x+5} \leq 0 \iff \frac{3x+1-2(4x+5)}{4x+5} \leq 0 \iff \frac{-5x-9}{4x+5} \leq 0.$$

30.4 b) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{4x-7}{5-2x} < 1 \iff \frac{4x-7}{5-2x} - \frac{5-2x}{5-2x} < 0 \iff \frac{4x-7-(5-2x)}{5-2x} < 0 \iff \frac{6x-12}{5-2x} < 0.$$

30.4 c) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{3}{4-x} \leq 2 \iff \frac{3}{4-x} - \frac{2(4-x)}{4-x} \leq 0 \iff \frac{3-2(4-x)}{4-x} \leq 0 \iff \frac{2x-5}{4-x} \leq 0.$$

30.4 d) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x+1}{-2x+3} \geq 3 \iff \frac{x+1}{-2x+3} - \frac{3(-2x+3)}{-2x+3} \geq 0 \iff \frac{x+1-3(-2x+3)}{-2x+3} \geq 0 \iff \frac{7x-8}{-2x+3} \geq 0.$$

30.5 a) On a $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{3x}{x(x+1)} - \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{3x-2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{x-2}{x(x+1)}$.

30.5 b) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{3}{x+1} \leq \frac{2}{x} \iff \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} \leq 0 \iff \frac{x-2}{x(x+1)} \leq 0.$$

On dresse le tableau de signes de $\frac{x-2}{x(x+1)}$ et on a :

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-2}{x(x+1)}$	$-$	$+$	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{3}{x+1} \leq \frac{2}{x}$ est donc $] -\infty, -1[\cup]0, 2]$.

30.6 a) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{x} \leq \frac{3}{2x+6} \iff \frac{1 \times (2x+6)}{x \times (2x+6)} - \frac{3 \times x}{x \times (2x+6)} \leq 0 \iff \frac{2x+6-3x}{x(2x+6)} \leq 0 \iff \frac{-x+6}{x(2x+6)} \leq 0.$$

30.6 b) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x+2}{x} \iff \frac{x \times (x-1)}{x \times (x+2)} - \frac{(x+2)^2}{x \times (x+2)} \leq 0 \iff \frac{x^2 - x - (x^2 + 4x + 4)}{x(x+2)} \leq 0 \iff \frac{-5x-4}{x(x+2)} \leq 0.$$

30.7 a) On a les équivalences suivantes : $25 - 4x^2 \geq 0 \iff 5^2 - (2x)^2 \geq 0 \iff (5 - 2x)(5 + 2x) \geq 0.$

30.7 b) On a les équivalences suivantes : $\frac{x^2}{9} - \frac{1}{16} > 0 \iff \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 > 0 \iff \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right) > 0.$

30.7 c) On a les équivalences suivantes :

$$(3x+1)^2 \leq 25 \iff (3x+1)^2 - 5^2 \leq 0 \iff (3x+1-5)(3x+1+5) \leq 0 \iff (3x-4)(3x+6) \leq 0.$$

30.7 d) On a les équivalences suivantes :

$$(2x+4)^2 \geq 9x^2 \iff (2x+4)^2 - (3x)^2 \geq 0 \iff (2x+4-3x)(2x+4+3x) \geq 0 \iff (-x+4)(5x+4) \geq 0.$$

30.8 a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (2x+1)(5-x) + 4x^2 - 1 &\leq 0 \iff (2x+1)(5-x) + (2x)^2 - 1^2 \leq 0 \\ &\iff (2x+1)(5-x) + (2x-1)(2x+1) \leq 0 \\ &\iff (2x+1)((5-x) + (2x+1)) \leq 0 \\ &\iff (2x+1)(x+4) \leq 0. \end{aligned}$$

30.8 b) On a les équivalences suivantes :

$$(3x+1)^2 - (2x+5)^2 \geq 0 \iff ((3x+1) - (2x+5))((3x+1) + (2x+5)) \geq 0 \iff (x-4)(5x+6) \geq 0.$$

30.8 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 8x^3 - 18x &\leq 0 \iff 2x \times 4x^2 - 2x \times 9 \leq 0 \\ &\iff 2x(4x^2 - 9) \leq 0 \\ &\iff 2x((2x)^2 - 3^2) \leq 0 \\ &\iff 2x(2x-3)(2x+3) \leq 0. \end{aligned}$$

Fiche n° 31. Équations du premier degré

Réponses

31.1 a).....	$\left\{\frac{1}{3}\right\}$	31.2 b).....	$\{\sqrt{3}\}$	31.3 c).....	$\{1\}$
31.1 b).....	$\{-5\}$	31.2 c).....	$\{3 + 2\sqrt{2}\}$	31.3 d).....	pas de solution
31.1 c).....	$\left\{\frac{5}{16}\right\}$	31.2 d).....	pas de solution	31.4 a).....	$\left\{\frac{10}{3}\right\}$
31.1 d).....	$\{-2\}$	31.3 a).....	$\left\{-\frac{5}{8}\right\}$	31.4 b).....	$\{1\}$
31.2 a).....	$\{3\sqrt{2}\}$	31.3 b).....	$\left\{\frac{11}{17}\right\}$	31.4 c).....	$\left\{\frac{12}{7}\right\}$
				31.4 d).....	$\left\{\frac{10}{13}\right\}$

Corrigés

31.1 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes : $3x + 2 = 3 \iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}$.

31.1 c) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes : $11x - 2 = 3 - 5x \iff 16x = 5 \iff x = \frac{5}{16}$.

31.2 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\sqrt{8}x - 4 = \sqrt{2}x + 2 \iff 2\sqrt{2}x - 4 = \sqrt{2}x + 2 \iff \sqrt{2}x = 6 \iff x = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times 3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

31.2 c) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\sqrt{2}x - 1 = \sqrt{2} + x \iff (\sqrt{2} - 1)x = \sqrt{2} + 1 \iff x = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \iff x = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} \iff x = 3 + 2\sqrt{2}.$$

31.2 d) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\sqrt{6}x + 2 = \sqrt{3}(\sqrt{2}x - 1) \iff \sqrt{6}x + 2 = \sqrt{6}x - \sqrt{3} \iff 2 = -\sqrt{3}, \text{ ce qui est impossible.}$$

31.3 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{4} - \frac{x}{3} \iff \frac{2}{3}x = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3 - 8}{12} = -\frac{5}{12} \iff x = -\frac{5}{12} \times \frac{3}{2} = -\frac{5}{8}.$$

31.3 b) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{x}{\frac{1}{2} + \frac{3}{5}} &= 2x - 1 \iff \frac{x}{\frac{5+6}{10}} = 2(2x - 1) \iff \frac{10}{11}x = 4x - 2 \iff \left(4 - \frac{10}{11}\right)x = 2 \\ &\iff \frac{34}{11}x = 2 \iff x = \frac{11}{17}. \end{aligned}$$

31.3 d) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{3}\left(2x - \frac{5}{2}\right) = \frac{x+1}{1+\frac{1}{2}} \iff 2x - \frac{5}{2} = 3\frac{x+1}{\frac{3}{2}} = 2(x+1) \iff 2x - \frac{5}{2} = 2x + 2 \iff -\frac{5}{2} = 2,$$

ce qui est impossible. Ainsi, l'équation n'a pas de solution.

31.4 a) Soit x un réel différent de 0. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{5} \iff 2 = \frac{3}{5}x \iff x = \frac{10}{3}.$$

31.4 b) Soit x un réel différent de $\frac{1}{2}$. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{\sqrt{2}}{x - \frac{1}{2}} = \sqrt{8} \iff \frac{\sqrt{2}}{x - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \iff \frac{1}{x - \frac{1}{2}} = 2 \iff x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \iff x = 1.$$

31.4 c) Soit x un réel différent de 2 et de 1. Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-2} = -\frac{5}{x-1} &\iff \frac{x-2}{2} = -\frac{x-1}{5} \iff \frac{x}{2} - 1 = -\frac{x}{5} + \frac{1}{5} \iff \frac{x}{2} + \frac{x}{5} = 1 + \frac{1}{5} \\ &\iff \frac{7}{10}x = \frac{6}{5} \iff x = \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

31.4 d) Soit x un nombre réel différent de $\frac{1}{2}$ (car $1 - 2x = 0 \iff x = \frac{1}{2}$, on exclut donc cette valeur) et de 4. Alors, en procédant comme précédemment, on a l'équivalence :

$$\frac{1}{3(1-2x)} = -\frac{2}{4-x} \iff x = \frac{10}{13}.$$

Fiche n° 32. Équations du premier degré avec paramètre

Réponses

32.1 a) ... $\boxed{a-3}$ 32.1 d) .. $\boxed{\frac{a^2-2}{2}}$ 32.1 f) .. $\boxed{\frac{1-a^2}{1+a^2}}$ 32.2 c) $\boxed{-\frac{12}{b}}$ 32.3 a) $\boxed{\text{a}}$
 32.1 b) ... $\boxed{\frac{3-a}{2}}$ 32.1 e) $\boxed{-1}$ 32.2 a) $\boxed{5b}$ 32.2 d) ... $\boxed{-\frac{3}{4b^2}}$ 32.3 b) $\boxed{\text{c}}$
 32.1 c) ... $\boxed{1-a}$ 32.2 b) ... $\boxed{\frac{6}{b}+8}$ 32.3 c) $\boxed{\text{a}}$

Corrigés

32.1 b) On commence par isoler $2x$, puis on divise les deux membres de l'égalité par 2 : $2x + a = 3$ devient $2x = 3 - a$ puis $x = \frac{3-a}{2}$.

32.1 c) On a $5 - 3x = 3a + 2$, donc $-3x = 3a + 2 - 5$. Finalement, $x = \frac{3a-3}{-3} = 1 - a$.

32.1 d) On a $1 - 2x = 3 - a^2$, donc $-2x = 3 - a^2 - 1$. Ainsi, $x = \frac{2-a^2}{-2}$, donc $x = \frac{-(2-a^2)}{2} = \frac{a^2-2}{2}$.

32.1 e) On a $1 + a^2x = -x - a^2$, donc $a^2x + x = -a^2 - 1$. Alors, $(a^2 + 1)x = -(a^2 + 1)$. Comme $a^2 + 1 \neq 0$, alors $x = -\frac{a^2+1}{a^2+1} = -1$.

32.1 f) En développant, on obtient $x^2 - a^2x - 1 = x^2 + x - 2 + a^2$, puis, en regroupant, $x^2 - x^2 - a^2x - x = 1 - 2 + a^2$. Ainsi, $-(1 + a^2)x = -1 + a^2$ donc $x = \frac{1-a^2}{1+a^2}$.

32.2 b) On a $\frac{x}{2} - \frac{3}{b} = 4$, donc $\frac{x}{2} = 4 + \frac{3}{b}$ et $x = 2\left(4 + \frac{3}{b}\right) = 8 + \frac{6}{b}$.

32.2 c) On a $\frac{2}{x} + \frac{b}{3} = \frac{b}{6}$, donc $\frac{2}{x} = \frac{b}{6} - \frac{b}{3}$. Ainsi, $\frac{2}{x} = \frac{b}{6} - \frac{2b}{6} = -\frac{b}{6}$. Donc, $2 = -\frac{b}{6} \times x$ puis $2 \times \left(-\frac{6}{b}\right) = x$. Finalement, $x = -\frac{12}{b}$.

32.2 d) En développant le membre de droite, l'équation s'écrit $\frac{3}{bx} + x = x - 4b$. En soustrayant par x , on obtient $\frac{3}{bx} = -4b$, donc $\frac{bx}{3} = -\frac{1}{4b}$, puis on obtient le résultat en multipliant les deux membres par $\frac{3}{b}$.

32.3 a) En développant, on obtient $x^2 + (1 + 2b)x + 2b = x^2 + (1 + 2b)x + (1 + 2b)$, donc $0 = 1$ et cette équation ne possède pas de solution. Autrement dit, elle possède 0 solution. Ainsi, $\boxed{\text{a}}$ est la bonne réponse.

32.3 b) Si $m = 0$, l'équation s'écrit $3 = 2$ et ne possède pas de solution. Si $m \neq 0$, l'équation possède comme unique solution $-\frac{1}{m}$. L'ensemble des solutions dépend donc de la valeur de m (réponse c).

32.3 c) Si $a = 0$, l'équation s'écrit $0 = 0$ et tous les réels sont solutions (la réponse a est vraie, la réponse b est fausse). Si $a \neq 0$, l'équation s'écrit $x + a = 2x - 1$, donc $x = 1 + a$ (la réponse c est donc fausse également).

Fiche n° 33. Équations du deuxième degré

Réponses

33.1 a).....	$\{-7, 7\}$	33.2 f).....	$\left\{-\frac{\sqrt{210}}{6}, \frac{\sqrt{210}}{6}\right\}$	33.4 d).....	$\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$
33.1 b).....	$\{-12, 12\}$	33.3 a).....	$\{-14, 0\}$	33.5 a).....	$\left\{-\frac{1}{9}, 0\right\}$
33.1 c).....	$\left\{-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right\}$	33.3 b).....	$\{-3, 2\}$	33.5 b).....	$\left\{0, \frac{9}{20}\right\}$
33.1 d).....	$\{-50, 50\}$	33.3 c).....	$\left\{-8, \frac{20}{3}\right\}$	33.5 c).....	$\{-9, -2, 9\}$
33.1 e).....	$\{-100, 100\}$	33.3 d).....	$\left\{-\frac{9}{22}, \frac{1}{4}\right\}$	33.5 d).....	$\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\right\}$
33.1 f).....	$\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$	33.3 e).....	$\left\{-\frac{5}{7}, \frac{3}{5}\right\}$	33.6 a).....	$\{-1\}$
33.2 a).....	$\{-2, 2\}$	33.3 f).....	$\left\{-\frac{20}{13}, \frac{20}{9}\right\}$	33.6 b).....	$\{\sqrt{2}\}$
33.2 b).....	$\left\{-\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$	33.4 a).....	$\{-2\}$	33.6 c).....	$\left\{\frac{1}{2}\right\}$
33.2 c).....	$\left\{-\frac{\sqrt{33}}{6}, \frac{\sqrt{33}}{6}\right\}$	33.4 b).....	$\left\{-\frac{2}{9}, 0\right\}$	33.6 d).....	$\{-1, 1\}$
33.2 d).....	$\left\{-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right\}$	33.4 c).....	$\left\{\frac{11}{23}, 7\right\}$	33.7 a).....	$\{-3, 3\}$
33.2 e).....	$\left\{-\frac{4\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}\right\}$			33.7 b).....	$\{-3, 3\}$

Corrigés

33.2 d) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{5}{4x^2} = \frac{4}{5} \iff \frac{5^2}{4^4} = x^2 \iff \left(x = -\frac{5}{4} \text{ ou } x = \frac{5}{4}\right).$$

33.2 e) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{2}{45} = 0 \iff x^2 = \frac{2}{45} \times 8 = \frac{16}{45} \iff \left(x = -\sqrt{\frac{16}{45}} = -\frac{4\sqrt{5}}{15} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{16}{45}} = \frac{4\sqrt{5}}{15}\right).$$

33.2 f) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{3}{7}x^2 = \frac{5}{2} \iff x^2 = \frac{5}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{5 \times 6 \times 7}{6^2} = \frac{30 \times 7}{6^2} = \frac{210}{6^2} \iff \left(x = -\frac{\sqrt{210}}{6} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{210}}{6}\right).$$

33.3 c) On a l'équivalence suivante : $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)^2 = 121 \iff \left(\frac{3}{2}x + 1 = 11 \text{ ou } \frac{3}{2}x + 1 = -11\right).$

De plus, on a les équivalences :

$$\frac{3}{2}x + 1 = 11 \iff \frac{3}{2}x = 10 \iff x = \frac{20}{3} \quad \text{et} \quad \frac{3}{2}x + 1 = -11 \iff \frac{3}{2}x = -12 \iff x = -\frac{24}{3} = -8.$$

33.3 f) On a l'équivalence suivante :

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{4}\right)^2 = \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{3}\right)^2 \iff \left(\frac{2}{3} + \frac{x}{4} = \frac{2x}{5} + \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{2}{3} + \frac{x}{4} = -\frac{2x}{5} - \frac{1}{3}\right).$$

De plus, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{x}{4} = \frac{2x}{5} + \frac{1}{3} &\iff -\frac{3}{20}x = -\frac{1}{3} \iff x = \frac{20}{9} \\ \text{et } \frac{2}{3} + \frac{x}{4} = -\frac{2x}{5} - \frac{1}{3} &\iff \frac{13}{20}x = -\frac{3}{3} = -1 \iff x = -\frac{20}{13}. \end{aligned}$$

33.4 a) On a les équivalences : $(x+2)(4x+8) = 0 \iff 4(x+2)^2 = 0 \iff x+2 = 0 \iff x = -2$.

33.5 a) On a les équivalences suivantes :

$$21x^2 + \frac{7}{3}x = 0 \iff 7x\left(3x + \frac{1}{3}\right) = 0 \iff \left(7x = 0 \text{ ou } 3x + \frac{1}{3} = 0\right) \iff \left(x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{9}\right).$$

33.5 b) On a les équivalences suivantes :

$$\frac{64}{3}x^2 = \frac{48}{5} \iff 8x\left(\frac{8}{3}x - \frac{6}{5}\right) = 0 \iff \left(x = 0 \text{ ou } x = \frac{6}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}\right).$$

33.5 d) On a les équivalences suivantes :

$$(1-2x)(x^2-2) = 0 \iff \left(1-2x = 0 \text{ ou } x^2-2 = 0\right) \iff \left(x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}\right).$$

33.6 a) On a les équivalences suivantes :

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1.$$

33.6 b) On a les équivalences suivantes : $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0 \iff (x - \sqrt{2})^2 = 0 \iff x = \sqrt{2}$.

33.6 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{4} = x &\iff x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \iff x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff x - \frac{1}{2} = 0 \iff x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

33.6 d) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 &\iff x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 0 \iff \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 0 \\ &\iff x = \frac{1}{x} \iff x^2 = 1 \iff (x = -1 \text{ ou } x = 1). \end{aligned}$$

33.7 a) On a les équivalences suivantes :

$$(x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0 \iff (x^2 - 9 = 0 \text{ ou } x^2 + 9 = 0) \iff (x^2 = 9 \text{ ou } x^2 = -9).$$

L'équation $x^2 = 9$ admettant pour solutions 3 et -3 et l'équation $x^2 = -9$ n'admettant pas de solution réelle, on en déduit que l'ensemble des solutions recherché est $\{-3, 3\}$.

33.7 b) On a les équivalences suivantes :

$$x^4 = 81 \iff x^4 - 81 = 0 \iff (x^2)^2 - 9^2 = 0 \iff (x^2 - 9)(x^2 + 9) = 0.$$

D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation est donc $\{-3, 3\}$.

Fiche n° 34. Systèmes d'équations

Réponses

34.1 a)	non	34.3 c)	(1, -1)	34.6	6
34.1 b)	oui	34.3 d)	(-1, 2)	34.7 a)	(\frac{5}{4}\sqrt{2}, -\frac{3}{2})
34.1 c)	oui	34.4 a)	(4, -2)	34.7 b)	(\frac{2+\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3})
34.1 d)	non	34.4 b)	(-3, -\frac{3}{4})	34.8	40
34.2 a)	non	34.4 c)	(-\frac{50}{9}, -\frac{74}{3})	34.9 a) ..	(x, \frac{3x-8}{2}), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}
34.2 b)	non	34.4 d)	(-\frac{3}{8}, \frac{5}{3})	34.9 b) ..	Il n'y a pas de solution
34.2 c)	oui				
34.2 d)	non				
34.3 a)	(2, 3)				
34.3 b)	(-2, 4)	34.5	(\frac{1}{5}, \frac{22}{5})		

Corrigés

34.1 a) En remplaçant x par 4 et y par 3 dans le premier membre de la première équation, on obtient $2 \times 4 - 4 \times 3$, ce qui vaut -4 et pas -10 . Ainsi, le couple $(4, 3)$ n'est pas solution.

34.1 b) On a $2 \times 3 - 4 \times 4 = -10$ et $-3 \times 3 + 6 \times 4 = 15$. Ainsi, le couple $(3, 4)$ est solution.

34.2 a) En considérant la deuxième ligne, on a $3 \times 4 - 4 \times 1 = 8 \neq -15$. Ainsi, $(4, 1)$ n'est pas une solution.

34.2 b) En considérant la première ligne, on a $2 \times (-5) + 3 \times 0 = -10 \neq 7$. Ainsi, $(-5, 0)$ n'est pas solution.

34.3 a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 5 \\ x = 2 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \iff \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ainsi, le couple solution est $(2, 3)$.

L_1 fait référence à la première ligne et L_2 à la deuxième. $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ signifie « on a remplacé L_2 par $L_2 - L_1$ ».

34.3 b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x - y = -6 \\ x + y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 6 \\ (y - 6) + y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y - 6 \\ 2y = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ainsi, le couple solution est $(-2, 4)$.

34.3 c) On peut utiliser la méthode par substitution en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ par exemple.

34.3 d) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{cases} x \\ 3(3 - 2y) + 5y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 - 2y \\ -y + 9 = 7 \end{cases}$$

En terminant les calculs, on trouve que le couple solution est $(-1, 2)$.

34.4 a) On peut utiliser la méthode par substitution en remarquant que $x = -2y$.

34.4 b) On peut utiliser la méthode par addition/soustraction en commençant par $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$.

34.4 c) On peut utiliser la méthode par addition/soustraction en commençant par $L_2 \leftarrow L_2 + 9L_1$.

34.4 d) En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$, la deuxième ligne devient $\frac{12}{5}y = -4$, ce qui permet de conclure.

34.5 Il faut résoudre le système $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$. On peut procéder par substitution.

34.6 En notant c le nombre de croissants et p celui de pains au chocolat, on trouve le système :

$$\begin{cases} c + p = 10 \\ 1 \times c + 1,20p = 10,80 \end{cases}$$

34.7 a) En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, la deuxième ligne devient $-4y = 6$, ce qui permet de conclure.

34.7 b) En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - (2 - \sqrt{3})L_1$, on trouve :

$$L_2 \iff -y - (2 - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})y = -(2 - \sqrt{3}) \iff y + (5 - 3\sqrt{3})y = 2 - \sqrt{3} \iff y = \frac{2 - \sqrt{3}}{6 - 3\sqrt{3}} \iff y = \frac{1}{3}.$$

Puis, en reportant dans la ligne 1, on trouve : $L_1 \iff x = 1 - \frac{1 - \sqrt{3}}{3} \iff x = \frac{2 + \sqrt{3}}{3}$.

34.8 En notant r et s respectivement le prix d'un billet pour Rennes et Saint-Malo, on trouve le système : $\begin{cases} 2r + 5s = 270 \\ 4r + 2s = 220 \end{cases}$. On peut commencer par faire $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$.

34.9 a) On a l'équivalence suivante : $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 15x - 10y = 40 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$.

On remarque que la deuxième ligne est toujours vraie. Elle est donc inutile.

On obtient donc : $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 15x - 10y = 40 \end{cases} \iff 3x - 2y = 8 \iff y = \frac{3x - 8}{-2}$.

Ainsi, un couple (x, y) est solution si et seulement s'il vérifie l'égalité $y = \frac{3x - 8}{-2}$. Il y a une infinité de solutions, qui sont tous les couples de la forme $\left(x, \frac{3x - 8}{-2}\right)$ (où x est dans $\mathbb{R}$).

34.9 b) On a l'équivalence suivante : $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x + 12y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 0 = -9 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$.

La dernière ligne est toujours fausse (quelles que soient les valeurs de x et y). Il n'y a donc pas de solution.

Fiche n° 35. Bilan et approfondissement sur les équations et inéquations

Réponses

35.1 a)	$\left\{-\frac{5}{17}\right\}$	35.11 a)	$\left]-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$
35.1 b)	$\{5\sqrt{3}\}$	35.11 b)	$\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$
35.2 a)	$\{1\}$	35.12 a)	$\left]\frac{1}{2}, 1\right[\cup [2, +\infty[$
35.2 b)	$\{\sqrt{3}\}$	35.12 b)	$] -\infty, -3[\cup [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup [3, +\infty[$
35.3 a)	$] -\infty, 1]$	35.13 a)	$\{-1, 3\}$
35.3 b)	$\left[-\frac{21}{2}, +\infty\right[$	35.13 b)	$\left\{-\frac{13}{8}, -\frac{11}{8}\right\}$
35.4 a)	$[-1, +\infty[$	35.13 c)	$\left\{-\frac{3}{5}, \frac{7}{5}\right\}$
35.4 b)	$\left]-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$	35.13 d)	$\left\{-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9\sqrt{3}}{2}\right\}$
35.5 a)	$\left\{\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right)\right\}$	35.14 a)	$\left\{\frac{4}{3}, 2\right\}$
35.5 b)	$\left\{\left(\frac{13}{4}, \frac{3}{4}\right)\right\}$	35.14 b)	$\left\{\frac{12}{5}, \frac{21}{5}\right\}$
35.6 a)	$\left\{-\frac{1}{3}(\sqrt{3}-1)a\right\}$	35.14 c)	$\left\{\frac{11}{4}\right\}$
35.6 b)	$\left]-\infty, \sqrt{2}a\right[$	35.14 d)	$\left\{\frac{7}{24}\right\}$
35.7 a)	$\{-3, 3\}$	35.15 a)	$\{-2, 0, 2\}$
35.7 b)	$\left\{-\frac{1}{6}, 0\right\}$	35.15 b)	$\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$
35.8 a)	$[1, 2]$	35.15 c)	$\left\{-\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$
35.8 b)	$\left[-2\sqrt{2}, 2\right] \cup \left[2\sqrt{2}, +\infty\right[$	35.15 d)	$\left\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right\}$
35.9 a)	$\{1\}$	35.16 a)	$\{-3, -1, 1, 3\}$
35.9 b)	$\left\{\frac{2}{7}\right\}$		
35.10 a)	$\{5\}$		
35.10 b)	$\{0\}$		

35.16 b)	$\{-\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$	35.18 a)	$\textcircled{c}$
35.17 a)	$\{\pm\sqrt{7}, \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{3}, \pm 1\}$	35.18 b)	$\frac{1-3\alpha}{1+\alpha^2}$
35.17 b)	$\left\{\pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$	35.18 c)	$\frac{3+\alpha}{1+\alpha^2}$

Corrigés

35.3 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{x-1}{2} \leq 2-2x \iff x-1 \leq 4-4x \iff 5x \leq 5 \iff x \leq 1.$$

35.4 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$x - \sqrt{2} \leq \sqrt{2}x - 1 \iff x(1 - \sqrt{2}) \leq \sqrt{2} - 1 \iff x \geq \frac{\sqrt{2} - 1}{1 - \sqrt{2}} \iff x \geq -1,$$

l'avant-dernière inégalité se justifiant par le fait que $1 - \sqrt{2} < 0$.

35.5 b) Soient x et y deux réels. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 4y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{3}{4} \\ x = 1 + 3y = \frac{13}{4} \end{cases}.$$

35.7 b) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$x^2 + 3x = 2x - 5x^2 \iff 6x^2 + x = 0 \iff (6x + 1)x = 0 \iff \left(x = -\frac{1}{6} \text{ ou } x = 0\right).$$

35.8 a) Soit x un réel. On a l'équivalence :

$$x(x-1) \leq 2(x-1) \iff (x-2)(x-1) \leq 0.$$

On résout alors cette dernière inéquation grâce à un tableau de signes.

35.9 b) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{4x+1}{2x-1} = \frac{2x+3}{x-1} &\iff (4x+1)(x-1) = (2x+3)(2x-1) \iff 4x^2 - 4x + x - 1 = 4x^2 - 2x + 6x - 3 \\ &\iff 4x^2 - 4x + x - 4x^2 + 2x - 6x = -3 + 1 \iff -7x = -2 \iff x = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

35.10 a) Soit x un réel différent de 1. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(x-1)} \iff \frac{4}{3(x-1)} = \frac{1}{3} \iff \frac{3(x-1)}{4} = 3 \iff x-1 = 4 \iff x = 5.$$

35.10 b) Soit x un réel différent de $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} + 3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} &\iff \sqrt{2}(x+\sqrt{2}) + 3(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) + \sqrt{2}(x-\sqrt{2}) \\ &\iff \sqrt{2}x + 2 + 3(x^2 - 2) = (x^2 - 2) + \sqrt{2}x - 2 \\ &\iff 2(x^2 - 2) = -4 \iff x^2 - 2 = -2 \iff x^2 = 0 \iff x = 0. \end{aligned}$$

35.11 a) Soit x un réel différent de $\frac{1}{2}$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{2x-1} \leq 3 + \frac{2}{2x-1} \iff 0 \leq 3 + \frac{1}{2x-1} \iff 0 \leq \frac{6x-3}{2x-1} + \frac{1}{2x-1} \iff 0 \leq \frac{6x-2}{2x-1}.$$

On fait un tableau de signes pour étudier $\frac{6x-2}{2x-1} = 2\frac{3x-1}{2x-1}$. On remarque que :

$$3x-1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad 2x-1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}.$$

On a alors le tableau de signes ci-dessous, qui assure que l'ensemble des solutions est $\left] -\infty, \frac{1}{3} \right] \cup \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$3x-1$		-	0	+
$2x-1$		-	0	+
$2\frac{3x-1}{2x-1}$	+	0	-	+

35.11 b) Soit x un réel différent de $\frac{2}{3}$. On a les équivalences suivantes :

$$\frac{1}{3x-2} - 4 \geq \frac{1}{2-3x} + 2 \iff \frac{2}{3x-2} - 6 \geq 0 \iff \frac{2-18x+12}{3x-2} \geq 0 \iff 2\frac{7-9x}{3x-2} \geq 0.$$

On poursuit alors le calcul comme à la question précédente.

35.12 a) Soit x un réel différent de $\frac{1}{2}$ et 1. On a les équivalences :

$$\frac{1}{x-1} \leq \frac{3}{2x-1} \iff \frac{3}{2x-1} - \frac{1}{x-1} \geq 0 \iff \frac{3x-3-2x+1}{(2x-1)(x-1)} \geq 0 \iff \frac{x-2}{(2x-1)(x-1)} \geq 0.$$

On conclut ensuite avec un tableau de signes.

35.12 b) Soit x différent de 3 et de -3. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3-x} - 1 &\leq -\frac{2}{3+x} + 1 \iff \frac{2}{x-3} - \frac{2}{3+x} + 2 \geq 0 \iff \frac{1}{x-3} - \frac{1}{3+x} + 1 \geq 0 \\ &\iff \frac{3+x-x+3}{(x-3)(x+3)} + \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)} \geq 0 \\ &\iff \frac{6+x^2-9}{(x-3)(x+3)} \geq 0 \iff \frac{x^2-3}{(x-3)(x+3)} \geq 0 \iff \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-3)(x+3)} \geq 0. \end{aligned}$$

On conclut alors avec un tableau de signes.

35.13 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$(x-1)^2 = 4 \iff (x-1=2 \quad \text{ou} \quad x-1=-2) \iff (x=3 \quad \text{ou} \quad x=-1).$$

35.13 b) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$(2x+3)^2 = \frac{1}{16} \iff \left(2x+3 = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad 2x+3 = -\frac{1}{4}\right) \iff \left(x = -\frac{11}{8} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{13}{8}\right).$$

35.13 d) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\left(\frac{x}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 \iff \left(\frac{x}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ ou } \frac{x}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}\right) \iff \left(x = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

35.14 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$(x-1)^2 = (3-2x)^2 \iff (x-1 = 3-2x \text{ ou } x-1 = 2x-3) \iff (3x = 4 \text{ ou } x = 2).$$

35.14 c) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \iff \left(\frac{x}{2} - 3 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \text{ ou } \frac{x}{2} - 3 = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) \iff \left(-3 = \frac{1}{4} \text{ ou } x = 3 - \frac{1}{4}\right).$$

Comme l'égalité $-3 = \frac{1}{4}$ est impossible, la seule solution est $x = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$.

35.15 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (x^2 - 2)^2 = 4 &\iff (x^2 - 2 = 2 \text{ ou } x^2 - 2 = -2) \iff (x^2 = 4 \text{ ou } x^2 = 0) \\ &\iff (x = -2 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 0). \end{aligned}$$

35.15 d) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$x^4 = 64 \iff (x^2)^2 = 64 = 8^2 \iff (x^2 = 8 \text{ ou } x^2 = -8).$$

Mais, comme x est réel, $x^2 \geq 0$ donc $x^2 = -8$ est impossible. Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$x^4 = 64 \iff (x = \sqrt{8} \text{ ou } x = -\sqrt{8}) \iff (x = 2\sqrt{2} \text{ ou } x = -2\sqrt{2}).$$

35.16 a) Soit x tel que $3x^2 - 5 \neq 0$, c'est-à-dire : soit x différent de $\sqrt{\frac{5}{3}}$ et de $-\sqrt{\frac{5}{3}}$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{5x^2 - 1}{3x^2 - 5}\right)^2 = 4 &\iff \left(\frac{5x^2 - 1}{3x^2 - 5} = 2 \text{ ou } \frac{5x^2 - 1}{3x^2 - 5} = -2\right) \\ &\iff (5x^2 - 1 = 6x^2 - 10 \text{ ou } 5x^2 - 1 = -6x^2 + 10) \\ &\iff (x^2 = 9 \text{ ou } 11x^2 = 11) \iff (x = 3 \text{ ou } x = -3 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1). \end{aligned}$$

35.16 b) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{-6x^2 + 14}{x^2 - 1}\right)^2 = 4 &\iff \left(\frac{-6x^2 + 14}{x^2 - 1} = 2 \text{ ou } \frac{-6x^2 + 14}{x^2 - 1} = -2\right) \\ &\iff (-6x^2 + 14 = 2x^2 - 2 \text{ ou } -6x^2 + 14 = -2x^2 + 2) \\ &\iff (8x^2 = 16 \text{ ou } 4x^2 = 12) \iff (x^2 = 2 \text{ ou } x^2 = 3) \\ &\iff (x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}). \end{aligned}$$

35.17 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \left((x^2 - 4)^2 - 5\right)^2 = 16 &\iff (x^2 - 4)^2 - 5 = 4 \quad \text{ou} \quad (x^2 - 4)^2 - 5 = -4 \\
 &\iff (x^2 - 4)^2 = 9 \quad \text{ou} \quad (x^2 - 4)^2 = 1 \\
 &\iff x^2 - 4 = 3 \quad \text{ou} \quad x^2 - 4 = -3 \quad \text{ou} \quad x^2 - 4 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 - 4 = -1 \\
 &\iff x^2 = 7 \quad \text{ou} \quad x^2 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 = 5 \quad \text{ou} \quad x^2 = 3 \\
 &\iff x \in \left\{\pm\sqrt{7}, \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{3}, \pm 1\right\}.
 \end{aligned}$$

35.17 b) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{4x^2 - 8}{x^2 + 1}\right)^2 = 36 &\iff \left(\frac{4x^2 - 8}{x^2 + 1} = 6 \quad \text{ou} \quad \frac{4x^2 - 8}{x^2 + 1} = -6\right) \\
 &\iff \left(4x^2 - 8 = 6x^2 + 6 \quad \text{ou} \quad 4x^2 - 8 = -6x^2 - 6\right).
 \end{aligned}$$

Mais on a l'équivalence $4x^2 - 8 = 6x^2 + 6 \iff 2x^2 = -14$, ce qui est impossible.

On a ainsi les équivalences suivantes :

$$\left(\frac{4x^2 - 8}{x^2 + 1}\right)^2 \iff 4x^2 - 8 = -6x^2 - 6 \iff 10x^2 = 2 \iff x^2 = \frac{1}{5} \iff \left(x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

35.18 a) Soient x et y des réels. En faisant l'opération $L_1 - \alpha L_2$, on obtient :

$$(1 + \alpha^2)x = 1 - 3\alpha,$$

ce qui permet de déterminer x .

35.18 c) Grâce à L_2 , on en déduit que :

$$y = 3 + \alpha x = \frac{3 + 3\alpha^2}{1 + \alpha^2} + \frac{\alpha - 3\alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{3 + \alpha}{1 + \alpha^2}.$$

Fiche n° 36. Images et antécédents

Réponses

36.1 a) -4	36.2 i) aucun	36.4 d) -6
36.1 b) 0	36.2 j) -1 et 4	36.4 e) 3
36.1 c) 0	36.3 a) $-\frac{\sqrt{2}}{7}$	36.4 f) 0
36.1 d) 3	36.3 b) 0	36.4 g) -4
36.1 e) $-\frac{29}{9}$	36.3 c) $\frac{1 - \sqrt{2}}{7}$	36.4 h) -5 et 0
36.1 f) $-1 - 2\sqrt{2}$	36.3 d) $-\frac{15}{13}$	36.5 a) -3 et 2
36.2 a) 4	36.3 e) $-\frac{5\sqrt{5}}{13}$	36.5 b) $3x^2 + 3x - 18$
36.2 b) -1	36.3 f) ... $\frac{5}{39}(-9 + 4\sqrt{3} + \sqrt{21})$	36.5 c) -1 et 0
36.2 c) -2	36.4 a) 1	36.5 d) $3x^2 + 3x + \frac{3}{4}$
36.2 d) -2	36.4 b) -1	36.5 e) $-\frac{1}{2}$
36.2 e) 1	36.4 c) 0	36.6 a) $\frac{1}{3}$
36.2 f) 1		36.6 b) aucun
36.2 g) 1 et 2		36.6 c) $7 + 3\sqrt{5}$
36.2 h) 0 et 3		

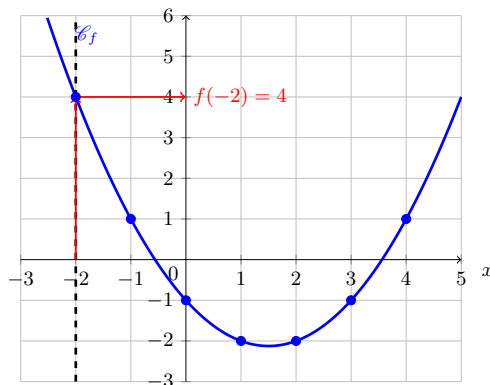
Corrigés

36.1 c) On a $f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$.

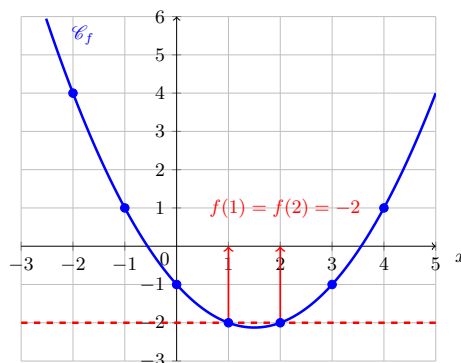
36.1 e) On a $f\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 4 = \frac{7}{9} - 4 = -\frac{29}{9}$.

36.1 f) On a $f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 - 4 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 4 = -1 - 2\sqrt{2}$.

36.2 a) On a :



36.2 g) On a :



36.3 a) On a les équivalences suivantes : $f(x) = 0 \iff 7x + \sqrt{2} = 0 \iff x = -\frac{\sqrt{2}}{7}$.

36.3 b) On a les équivalences suivantes : $f(x) = \sqrt{2} \iff 7x + \sqrt{2} = \sqrt{2} \iff x = 0$.

36.3 c) On a les équivalences suivantes : $f(x) = 1 \iff 7x + \sqrt{2} = 1 \iff x = \frac{1 - \sqrt{2}}{7}$.

36.3 d) On a les équivalences suivantes : $g(x) = 0 \iff \frac{13}{5}x + 3 = 0 \iff x = -\frac{15}{13}$.

36.3 e) On a les équivalences suivantes :

$$g(x) = 3 - \sqrt{5} \iff \frac{13}{5}x + 3 = 3 - \sqrt{5} \iff x = -\frac{5\sqrt{5}}{13}.$$

36.3 f) On a les équivalences suivantes :

$$g(x) = \frac{\sqrt{7} + 4}{\sqrt{3}} \iff \frac{13}{5}x + 3 = \frac{\sqrt{7} + 4}{\sqrt{3}} \iff x = \frac{5}{13} \frac{\sqrt{7} + 4 - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5}{39}(-9 + 4\sqrt{3} + \sqrt{21}).$$

36.5 a) On a l'équivalence suivante : $f(x) = 0 \iff (x = -3 \text{ ou } x = 2)$.

36.5 c) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = -18 \iff 3x^2 + 3x = 0 \iff 3x(x - 1) = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } x = -1).$$

36.5 e) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = -\frac{75}{4} \iff 3x^2 + 3x + \frac{3}{4} = 0 \iff 3\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) = 0 \iff 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

36.6 a) On a les équivalences suivantes : $f(x) = 1 \iff 5x - 2 = 1 - 4x \iff x = \frac{1}{3}$.

36.6 b) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = -\frac{5}{4} \iff 4(5x - 2) = -5(1 - 4x) \iff 8 = 5, \text{ qui n'a pas de solution.}$$

36.6 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = 1 - \sqrt{5} &\iff 5x - 2 = (1 - \sqrt{5})(1 - 4x) \iff (9 - 4\sqrt{5})x = 3 - \sqrt{5} \\ &\iff x = \frac{3 - \sqrt{5}}{9 - 4\sqrt{5}} = \frac{(3 - \sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})}{(9 - 4\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})} = 7 + 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Fiche n° 37. Tableaux de variations

Réponses

37.1 a) voir corrigé

37.1 b) voir corrigé

37.1 c) voir corrigé

37.2 a) (b)

37.2 b) (a)

37.2 c) (b)

37.2 d) (a)

37.2 e) (a)

37.2 f) (c)

37.2 g) (b)

37.2 h) (b)

37.2 i) (c)

37.3 a) $4 < \dots < 5$

37.3 b) $9 < \dots < 10$

37.3 c) $5 < \dots < 6$

37.3 d) $-2 < \dots < -1$

Corrigés

37.1 a) On a :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
variations de f		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
			1	2

37.1 b) On a :

x	-2	-1	1	2
variations de f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	-1	2	-1	2

37.1 c) On a :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
variations de f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		1	-1	2	

37.2 a) La fonction f est strictement décroissante sur $[6, 10]$. Or, 7 et 9 sont dans $[6, 10]$ et $7 < 9$ donc $f(7) > f(9)$.

37.2 b) La fonction f est strictement croissante sur $[1, 6]$. Or, 2 et 4 sont dans $[1, 6]$ et $2 < 4$ donc $f(2) < f(4)$.

37.2 c) La fonction f est strictement croissante sur $[10, 15]$. Comme 11 et 13 appartiennent à $[10, 15]$ et comme on a $11 < 13$, on en déduit que $f(11) < f(13)$.

37.2 d) La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, -4]$. Or, -30 et -4 sont dans $]-\infty, -4]$ et $-30 < -4$ donc $f(-30) < f(-4)$.

37.2 e) Par lecture du tableau de variations de f , on remarque que, pour tout $x \in [10, 15]$, $f(x) \leq 4$. De plus, pour tout $x \in [1, 6]$, $5 \leq f(x)$. Donc $f(11) \leq 4$ et $5 \leq f(2)$; ainsi, on a $f(11) \leq f(2)$.

37.2 f) On a, par lecture du tableau, $f(0) \in [5, 6]$ et $f(7) \in [-2, 8]$. On ne peut donc pas comparer $f(0)$ et $f(7)$.

37.2 g) Par lecture du tableau, on a $f(0) \geq 5$ et $f(16) \leq 4$ donc $f(0) > f(16)$.

37.3 a) On a $16 \leq 17 \leq 25$, donc, par croissance de la fonction « racine carrée » sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\sqrt{16} \leq \sqrt{17} \leq \sqrt{25}.$$

Autrement dit, on a $4 \leq \sqrt{17} \leq 5$.

37.3 b) En procédant comme dans la question précédente, on trouve $81 \leq 95 \leq 100$; donc $9 \leq \sqrt{95} \leq 10$.

37.3 c) En procédant comme dans la question précédente, on trouve $36 \leq 39 \leq 49$ donc $6 \leq \sqrt{39} \leq 7$.

On en déduit $\frac{4+6}{2} \leq \frac{4+\sqrt{39}}{2} \leq \frac{4+7}{2}$ puis $5 \leq \frac{4+\sqrt{39}}{2} \leq \frac{11}{2}$. Or, on a $\frac{11}{2} \leq 6$. Donc, $5 \leq \frac{4+\sqrt{39}}{2} \leq 6$.

37.3 d) De même, on a $49 \leq 53 \leq 64$ donc $7 \leq \sqrt{53} \leq 8$ et donc $-8 \leq -\sqrt{53} \leq -7$. On en déduit que $\frac{5-8}{2} \leq \frac{5-\sqrt{53}}{2} \leq \frac{5-7}{2}$ puis que $-\frac{3}{2} \leq \frac{5-\sqrt{53}}{2} \leq -1$ et enfin que $-2 \leq \frac{5-\sqrt{53}}{2} \leq -1$.

Fiche n° 38. Points des courbes des fonctions

Réponses

- 38.1 a) 38.4 38.6 a)
 38.1 b) 38.5 a) 38.6 b)
 38.2 a) 38.5 b) 38.7
 38.2 b) 38.8
 38.3 38.5 c) ...

Corrigés

38.1 a) On a $f(2) = 14$ donc le point $A(2; 14)$ est sur la courbe représentative de f .

38.2 a) Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x = 1$ a pour ordonnée $y = f(1) = 2$.

38.2 b) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = 5 \iff x^2 - 4x + 5 = 5 \iff x^2 - 4x = 0 \iff x(x - 4) = 0.$$

Comme un produit est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul, on a les équivalences suivantes :

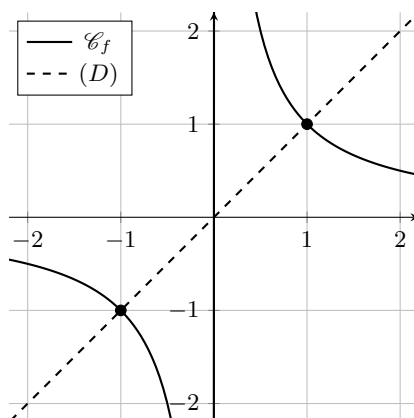
$$f(x) = 5 \iff (x = 0 \text{ ou } x - 4 = 0) \iff (x = 0 \text{ ou } x = 4).$$

38.3 On a $f(3) = 27 - 30 + 1 = -2 < 0$ donc le point $A(3; -2)$ est situé en dessous de l'axe des abscisses.

38.4 Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = x$. Soit $x \neq 0$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = x \iff \frac{1}{x} = x \iff 1 = x^2 \iff x = \pm 1.$$

Il y a donc deux points d'intersection. Celui d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée $y = x = 1$, et celui d'abscisse $x = -1$ et d'ordonnée $y = x = -1$. On peut représenter ces solutions sur le graphique suivant :



38.5 a) La quantité $g(a+1) = \frac{1}{a+1}$ est bien définie pour $a+1 \neq 0$, autrement dit pour $a \neq -1$.

38.5 b) Il s'agit de résoudre l'équation $2 = g(a+1)$. Déjà, il faut $a \neq -1$. Ensuite, on a les équivalences suivantes :

$$2 = g(a+1) \iff 2 = \frac{1}{a+1} \iff a+1 = \frac{1}{2} \iff a = -\frac{1}{2}.$$

38.5 c) Déjà, il faut $a \neq -1$. Ensuite, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a-1 = g(a+1) &\iff a-1 = \frac{1}{a+1} \iff (a+1)(a-1) = 1 \iff a^2 + a - a - 1 = 1 \\ &\iff a^2 = 2 \iff a = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

38.6 a) Il s'agit de compter le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

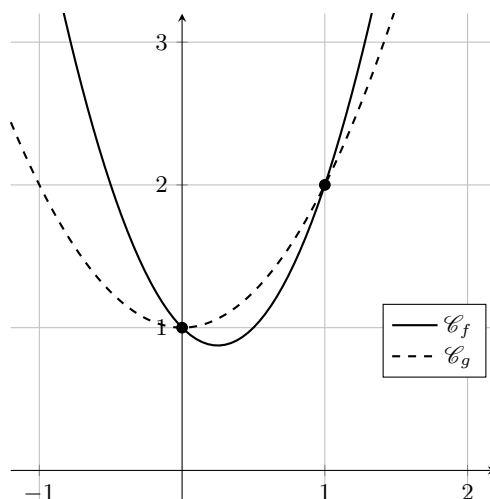
38.6 b) Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = g(x) \iff \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 \iff \frac{3}{4}x^2 = 3 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

38.7 On commence par résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) = g(x) \iff 2x^2 - x + 1 = x^2 + 1 \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff (x=0 \text{ ou } x=1).$$

Il y a donc deux points d'intersection : le point d'abscisse $x = 0$ et d'ordonnée $y = f(0) = 1$, et le point d'abscisse $x = 1$ et d'ordonnée $y = f(1) = 3$. On peut représenter ces points sur le graphique suivant :



38.8 Déjà, pour que $f(1)$ soit bien défini, il faut que $a \neq 1$. Soit $a \neq 1$. On a les équivalences suivantes :

$$f(1) = 2 \iff \frac{1+a}{1-a} = 2 \iff 1+a = 2(1-a) \iff 3a = 1 \iff a = \frac{1}{3}.$$

Cette valeur de a est acceptable car on a bien $\frac{1}{3} \neq 1$.

Fiche n° 39. Fonctions et inéquations

Réponses

39.1 a)	$f(1) < h(1) < g(1)$	39.2 a)	$\mathcal{C}_3$	39.4 a)	$3x(2-x)$
39.1 b)	$h(2) < f(2) < g(2)$	39.2 b)	$\mathcal{C}_2$	39.4 b)	voir corrigé
39.1 c)	$\left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$	39.2 c)	$\mathcal{C}_1$	39.4 c)	$]0, 2[$
39.1 d)	$\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$	39.2 d)	$\left[\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right]$	39.5 a)	$x^2(x+3)$
39.1 e)	$\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{11}{4}, 4\right]$	39.3 a)	$[4, +\infty[$	39.5 b)	voir corrigé
39.1 f)	$\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [3, 4]$	39.3 b)	$\left]-\infty, -\frac{16}{9}\right[$	39.5 c)	$] -3, 0[$ et $]0, +\infty[$

Corrigés

39.2 a) Soit x un réel. D'après l'énoncé, si $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}$ alors $f(x) \leq g(x)$. Or, sur l'intervalle $\left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right]$, seule la courbe $\mathcal{C}_3$ est en dessous d'une des deux autres courbes, en l'occurrence $\mathcal{C}_2$.

Ainsi, la courbe représentative de f est $\mathcal{C}_3$.

39.3 a) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$g(x) \geq \frac{7}{3} \iff \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \geq \frac{7}{3} \iff \frac{1}{2}x \geq \frac{6}{3} \iff x \geq 4 \iff x \in [4, +\infty[.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de $g(x) \geq \frac{7}{3}$ est $[4, +\infty[$.

39.3 b) Soit x un réel. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) < g(x) &\iff 2x + 3 < \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \iff 2x - \frac{1}{2}x < \frac{1}{3} - 3 \iff \frac{3}{2}x < -\frac{8}{3} \\ &\iff x < -\frac{16}{9} \iff x \in \left]-\infty, -\frac{16}{9}\right[. \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de $f(x) < g(x)$ est $\left]-\infty, -\frac{16}{9}\right[$.

39.4 a) On a $f(x) - g(x) = 2 - 3x^2 - (-6x + 2) = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$.

39.4 b) On a :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$3x$	-	0	+	+
$2 - x$	+	+	0	-
$f(x) - g(x)$	-	0	+	-

39.4 c) Du tableau de signes, on déduit que l'ensemble des solutions de $f(x) > g(x)$ est $]0, 2[$, et donc que $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $]0, 2[$.

39.5 a) On a $f(x) - g(x) = x^3 + 5 - (5 - 3x^2) = x^3 + 3x^2 = x^2(x + 3)$.

39.5 b) On étudie le signe de $f(x) - g(x)$. On a :

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
x^2	+	+	0	+
$x + 3$	-	0	+	+
$f(x) - g(x)$	-	0	+	+

39.5 c) On déduit du tableau de signes que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est :

$$]-3, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Ainsi, $\mathcal{C}_g$ est strictement en dessous de $\mathcal{C}_f$ sur les intervalles $]-3, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Fiche n° 40. Calcul avec les fonctions

Réponses

40.1 a) $8x^3 - 4x^2 + 2x$	40.2 c) $\textcircled{c}$	40.4 b) $\frac{1}{(x+1)^2}$
40.1 b) $-x^3 - x^2 - x$	40.2 d) $\textcircled{b}$	40.4 c) $x + 1 + 2\sqrt{x-1}$
40.1 c) $x^6 - x^4 + x^2$	40.3 a) $\sqrt{x^4 - 3}$	40.4 d) $x + 1$
40.1 d) $x^9 - x^6 + x^3$	40.3 b) $(x-3)^2$	40.5 a) $22x + \frac{179}{6}$
40.1 e) $t\sqrt{t} - t + \sqrt{t}$	40.3 c) $\frac{1}{x-4}$	40.5 b) $-6\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}$
40.1 f) $-x^3 + 2x^2 - 2x + 1$	40.3 d) $\frac{1}{(x-1)^4(x+1)^4}$	40.6 a) $\frac{1}{10}x + \frac{7}{80}$
40.2 a) $\textcircled{b}$	40.4 a) $\frac{2x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2}$	40.6 b) $6x + 3$
40.2 b) $\textcircled{a}$		40.6 c) $-5x - 2$

Corrigés

40.1 a) On a $f(2x) = (2x)^3 - (2x)^2 + 2x = 8x^3 - 4x^2 + 2x$.

40.1 b) On a $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 + (-x) = -x^3 - x^2 - x$.

40.1 c) On a $f(x^2) = (x^2)^3 - (x^2)^2 + x^2 = x^6 - x^4 + x^2$.

40.1 e) On a $f(\sqrt{t}) = (\sqrt{t})^3 - (\sqrt{t})^2 + \sqrt{t} = (\sqrt{t})^2\sqrt{t} - t + \sqrt{t} = t\sqrt{t} - t + \sqrt{t}$.

40.1 f) On a $(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$ et $(1-x)^3 = (1-x)(1-x)^2 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$. D'où :

$$\begin{aligned} f(1-x) &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - (1 - 2x + x^2) + 1 - x \\ &= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 1 + 2x - x^2 + 1 - x = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

40.2 a) Dans cet exercice, il est important de remarquer que, pour tout réel x et tout entier n , $(-x)^n = (-1)^n x^n$ et, par conséquent, $(-x)^n = -x^n$ si n est impair et $(-x)^n = x^n$ si n est pair. En utilisant ce résultat, on obtient, pour tout réel x , $f_1(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = \frac{-x}{1+x^2} = -f_1(x)$, ce qui montre que f_1 est une fonction impaire par définition.

40.2 c) Pour montrer qu'une fonction f_3 n'est pas paire, il suffit d'exhiber un réel x de son ensemble de définition tel que $f_3(-x) \neq f_3(x)$. Par exemple ici, $f_3(-1) = \frac{1}{2}$ tandis que $f_3(1) = \frac{3}{2}$. Ainsi, f_3 n'est pas paire. La fonction f_3 n'est pas non plus impaire, car un calcul montre, par exemple, que $f_3(-2) \neq -f_3(2)$.

40.2 d) On constate que, pour tout réel x , $f_4(-x) = \frac{(-x)^3 + 2(-x)}{(-x)^4 + 1} = \frac{-x^3 - 2x}{x^4 + 1} = \frac{-(x^3 + 2x)}{x^4 + 1} = -f_4(x)$.

40.3 b) On a $h(f(x)) = (\sqrt{x-3})^4 = (\sqrt{x-3})^2(\sqrt{x-3})^2 = (x-3)^2$.

40.3 c) On a $g(f(x)) = \frac{1}{(\sqrt{x-3})^2 - 1} = \frac{1}{x-3-1} = \frac{1}{x-4}$.

40.3 d) On a $h(g(x)) = \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^4 = \frac{1}{(x^2-1)^4} = \frac{1}{((x-1)(x+1))^4} = \frac{1}{(x-1)^4(x+1)^4}$.

40.4 a) On a $f(g(x)) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + \frac{2}{x-1} + 2 = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2}$.

40.4 b) On a $g(f(x)) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{(x+1)^2}$.

40.4 c) On a $f(h(x)) = (\sqrt{x-1})^2 + 2\sqrt{x-1} + 2 = x-1 + 2\sqrt{x-1} + 2 = x+1 + 2\sqrt{x-1}$.

40.4 d) On a $h(f(x)) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = x+1$; en effet, $x+1$ est positif pour les valeurs de x considérées.

40.5 a) On cherche les deux réels a et b tels que $f(x) = ax + b$ avec les conditions proposées. On sait que le coefficient directeur a est donné par le calcul suivant : $a = \frac{f\left(\frac{-4}{3}\right) - f\left(\frac{-5}{4}\right)}{\frac{-4}{3} - \frac{-5}{4}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{3}}{\frac{-4}{3} + \frac{5}{4}} = \frac{11}{6} \times (-12) = -22$.

Pour trouver ensuite le réel b , on peut par exemple utiliser la condition $f\left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{7}{3}$. Celle-ci s'écrit explicitement $22 \times \frac{-5}{4} + b = \frac{7}{3}$. On obtient alors $b = \frac{179}{6}$ après résolution de l'équation.

40.5 b) On peut reprendre la même démarche que dans la question précédente. Il est utile d'observer que $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$ et, par conséquent, $f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

40.6 a) On cherche les deux réels a et b tels que $f(x) = ax + b$ avec les conditions proposées. La deuxième condition s'écrit explicitement $3a + b - (-3a + b) = \frac{3}{5}$. Après simplification, on obtient donc $6a = \frac{3}{5}$ et donc $a = \frac{1}{10}$. En tenant compte de ceci, la première condition s'écrit $\frac{-1}{20} + b = \frac{1}{50} + \frac{1}{5}b$. Cette équation donne $b = \frac{7}{80}$.

40.6 b) Sur le même principe, on cherche à expliciter les conditions en utilisant l'expression $f(x) = ax + b$. En faisant cela, on trouve que les réels a et b doivent respecter $a - 2b = 0$ et $2a + 3b = 21$. Il s'agit donc de résoudre le système de deux équations à deux inconnues (a et b) suivant :

$$\begin{cases} a - 2b = 0 & (L_1) \\ 2a + 3b = 21. & (L_2) \end{cases}$$

La combinaison linéaire $L_2 - 2 \times L_1$ permet de trouver $b = 3$, puis d'en déduire $a = 6$.

40.6 c) On cherche f sous la forme $f(x) = ax + b$. La première condition donne $b = -2$ et la troisième condition donne $a < 0$. Après simplification, la deuxième condition s'écrit $a^2 = 25$. En vertu de la troisième condition, on rejette la solution 5 pour ne garder que la solution négative, qui est -5 . On aboutit donc à $f(x) = -5x - 2$.

Fiche n° 41. Bilan et approfondissement sur les fonctions

Réponses

41.1 a) -3	41.4 e) $] -2, +\infty[$	41.7 b) $\frac{8}{9}x + 3$
41.1 b) $13/2$	41.4 f) $] -8, 8[$	41.7 c) $-\frac{x}{4}\left(x + \frac{32}{9}\right)$
41.1 c) -20	41.5 a) $[3, +\infty[$	41.7 d) $\left[-\frac{32}{9}, 0\right]$
41.1 d) 44	41.5 b) $] -\infty, -2[\cup] 3, +\infty[$	41.8 a) $\frac{1}{x(x+2)}$
41.1 e) $] -\infty, -3]$	41.5 c) $[3, +\infty[$	41.8 b) $\frac{(x-1)^2}{4x}$
41.1 f) $[16, +\infty[$	41.5 d) $] -2, 3]$	41.8 c) x
41.2 a) 29	41.5 e) $] 3, +\infty[$	41.9 a) $\textcircled{b}$
41.2 b) 8	41.5 f) $] -\infty, -2] \cup] 3, +\infty[$	41.9 b) $\textcircled{a}$
41.2 c) -1 et 1	41.6 a) $\textcircled{a}$	41.10 a) $2bx$
41.2 d) -5 et 5	41.6 b) $\textcircled{c}$	41.10 b) $b = 0$
41.2 e) $[-2, 2]$	41.6 c) $\textcircled{b}$	41.11 a) $a = 15$ et $b = -2$
41.2 f) $] -\infty, -3] \cup [3, +\infty[$	41.6 d) $\textcircled{a}$	41.11 b) $\textcircled{b}$
41.3 a) $77/85$	41.6 e) $\textcircled{c}$	41.11 c) positive
41.3 b) 1	41.6 f) $\textcircled{b}$	41.11 d) 7
41.3 c) -2	41.6 g) $\textcircled{a}$	41.12 a) 6
41.3 d) 0 et $1/42$	41.6 h) $\textcircled{a}$	41.12 b) 7
41.4 a) $\mathbb{R} \setminus \{-8\}$	41.7 a) $(-9/2; -1)$	
41.4 b) $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$		
41.4 c) $\mathbb{R} \setminus \{-1/2, 5\}$		
41.4 d) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$		

Corrigés

41.2 e) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) \leq 14 \iff 3x^2 + 2 \leq 14 \iff x^2 \leq 4 \iff |x| \leq 2.$$

On a donc $f(x) \leq 14 \iff x \in [-2, 2]$.

41.2 f) On a les équivalences suivantes :

$$f(x) \geq 29 \iff 3x^2 + 2 \geq 29 \iff x^2 \geq 9 \iff |x| \geq 3.$$

On a donc $f(x) \geq 29 \iff x \in]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$.

41.3 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\iff \frac{(7x-3)(3x+1)}{21x^2+1} = 1 \iff (7x-3)(3x+1) = 21x^2+1 \\ &\iff 21x^2-2x-3 = 21x^2+1 \iff -2x-4 = 0 \iff x = -2. \end{aligned}$$

41.3 d) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = -3 &\iff \frac{(7x-3)(3x+1)}{21x^2+1} = -3 \iff 21x^2-2x-3 = -3(21x^2+1) \\ &\iff 84x^2-2x=0 \iff \left(x=0 \text{ ou } x = \frac{1}{42}\right). \end{aligned}$$

41.4 b) On a $14x-7=0$ pour $x = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$, donc l'expression est correctement définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

41.4 c) Le dénominateur s'annule en $x = 5$ et en $x = -\frac{1}{2}$ donc la fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 5\right\}$.

41.4 d) On a les équivalences $x^2-1=0 \iff x^2=1 \iff (x=-1 \text{ ou } x=1)$.

41.4 e) On a $x+2 > 0$ lorsque $x > -2$, donc l'expression est correctement définie sur $] -2, +\infty[$.

41.4 f) On établit le tableau de signes de l'expression $(8-x)(x+8)$:

x	$-\infty$	-8	8	$+\infty$
$8-x$		+	+	-
$x+8$	-	0	+	+
$(8-x)(x+8)$	-	0	+	0

L'expression $(8-x)(x+8)$ est strictement positive pour $x \in]-8, 8[$.

41.5 b) L'expression proposée est définie pour x tel que $(x-3)(x+2) > 0$. On établit le tableau de signes de cette expression :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x-3$	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+
$(x-3)(x+2)$	+	0	-	0

On a $(x-3)(x+2) > 0$ pour $x \in]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$.

41.5 c) Pour que l'expression soit définie, il faut et il suffit que $x-3 \geq 0$ et $x+2 > 0$; ainsi, la fonction est correctement définie sur l'intersection $[3, +\infty[\cap]-2, +\infty[$, c'est-à-dire sur $[3, +\infty[$.

41.5 d) On cherche l'intervalle sur lequel $\frac{x-3}{x+2} \leq 0$. On établit le tableau de signes de cette expression :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x-3$	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+
$\frac{x-3}{x+2}$	+		-	0

On a $\frac{x-3}{x+2} \leq 0$ pour $x \in]-2, 3]$.

41.6 a) On a $f(-3) = \frac{7}{2}$. Puisque $5 \in [2, 9]$ et f est croissante sur $[2, 9]$, on a $1 \leq f(5) \leq \frac{4}{3}$. De plus, on a l'inégalité $\frac{4}{3} < \frac{4}{2} < \frac{7}{2}$; donc, on a $f(5) \leq \frac{7}{2}$. Finalement, on a $f(-3) \geq f(5)$.

41.6 b) On a $f(6) \in \left[1, \frac{4}{3}\right]$ et $f(1) \in \left[1, \frac{7}{2}\right]$. On n'a pas assez d'informations pour conclure.

41.6 c) On a $f(16) \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right]$ et $f(-1) \in \left[1, \frac{7}{2}\right]$, donc $f(16) < 1$ alors que $f(-1) \geq 1$.

41.6 d) On a $f(2) = 1$ et $f(17) \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right]$ or $1 \geq \frac{1}{2}$ donc $f(2) \geq f(17)$.

41.6 f) On a $-3 = -\frac{9}{3} \leq -\frac{8}{3} < 0$ et $0 < \frac{1}{625} \leq 2$ donc $-3 \leq -\frac{8}{3} < \frac{1}{625} \leq 2$. Par décroissance de f sur $[-3, 2]$, on a $f\left(-\frac{8}{3}\right) \geq f\left(\frac{1}{625}\right)$.

41.6 g) On a $2 < \frac{5}{2} < 3$ et $3 < \frac{18}{5} < 4 < 9$. Par croissance de f sur $[2, 9]$, on a $f\left(\frac{5}{2}\right) \leq f\left(\frac{18}{5}\right)$.

41.7 b) La fonction g étant affine, fixons $m, p \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = mx + p$ pour $x \in \mathbb{R}$.

- La courbe $\mathcal{C}_g$ passant par les points A et B, on a $g\left(-\frac{9}{2}\right) = -1$ et $g(0) = 3$.
- Déterminons le coefficient m . D'une part, $g(0) - g\left(-\frac{9}{2}\right) = 3 - (-1) = 4$. D'autre part, par définition de g , on a $g(0) - g\left(-\frac{9}{2}\right) = m \times 0 + p - \left(m \times \left(-\frac{9}{2}\right) + p\right) = \frac{9}{2}m$. On a donc $\frac{9}{2}m = 4$, donc $m = \frac{8}{9}$.
- Enfin, on a $3 = g(0) = m \times 0 + p$, donc $p = 3$.
- Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{8}{9}x + 3$.

41.7 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) - g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 3 - \left(\frac{8}{9}x + 3\right) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{8}{9}x = -\frac{x}{4}\left(x + \frac{32}{9}\right)$.

41.7 d) On établit le tableau de signes de la différence $f(x) - g(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{32}{9}$	0	$+\infty$
$-\frac{x}{4}$		+	0	+
$x + \frac{32}{9}$	-	0	+	+
$f(x) - g(x)$	-	0	+	0

On en déduit que $f(x) - g(x) \geq 0$ lorsque $x \in \left[-\frac{32}{9}, 0\right]$, c'est-à-dire $f(x) \geq g(x)$ lorsque $x \in \left[-\frac{32}{9}, 0\right]$.

41.8 a) On a $f(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 + 2x + 1 - 1} = \frac{1}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x(x+2)}$.

41.8 b) On a $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2 - (x-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1)} = \frac{(x-1)^2}{4x}$.

41.8 c) On a $f\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) = \frac{1}{\frac{1+x}{x} - 1} = \frac{1}{\frac{1+x-x}{x}} = x$.

41.9 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $s(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -s(x)$.

41.9 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $p(-x) = f(-x) \times g(-x) = (-f(x)) \times (-g(x)) = f(x) \times g(x) = p(x)$.

41.10 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) - f(-x) = ax^2 + bx + c - (ax^2 - bx + c) = 2bx$.

41.10 b) Supposons que f est paire. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$, c'est-à-dire $f(x) - f(-x) = 0$.

En particulier, pour $x = 1$, d'après la question précédente, on obtient $2b = 0$, donc $b = 0$.

Réciproquement, si $b = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + c = a(-x)^2 + c = f(-x)$, donc f est paire.

41.11 a) On développe et on réduit :

$$\begin{aligned} (\sqrt{56} - 8)^2 - (\sqrt{56} - 7)^2 &= 56 - 2 \times 8 \times \sqrt{56} + 8^2 - (56 - 2 \times 7 \times \sqrt{56} + 7^2) \\ &= 2 \times (7 - 8)\sqrt{56} + 64 - 49 = -2\sqrt{56} + 15. \end{aligned}$$

41.11 b) On a $a^2 = 225$ et $56b^2 = 4 \times 56 = 224$, donc $a^2 \geq 56b^2$.

41.11 c) D'après la question précédente, on a $a^2 \geq 56b^2$. Par croissance de la fonction racine carrée, on en déduit que $|a| \geq |b|\sqrt{56}$, donc $15 \geq 2\sqrt{56}$, donc $15 - 2\sqrt{56} \geq 0$. Ainsi, on a $(\sqrt{56} - 8)^2 - (\sqrt{56} - 7)^2 \geq 0$.

41.11 d) Puisque $(\sqrt{56} - 8)^2 - (\sqrt{56} - 7)^2 \geq 0$, on a $(\sqrt{56} - 8)^2 \geq (\sqrt{56} - 7)^2$.

Par croissance de la fonction racine carrée, on a donc $|\sqrt{56} - 8| \geq |\sqrt{56} - 7|$. Ainsi, le nombre réel $\sqrt{56}$ est plus proche de 7 que de 8.

41.12 a) Puisque $36 < 43 < 49$, on a, par croissance stricte de la racine carrée, $\sqrt{36} < \sqrt{43} < \sqrt{49}$; autrement dit, on a $6 < \sqrt{43} < 7$. Avec $n = 6$, on a bien $n < \sqrt{43} < n + 1$.

41.12 b) L'objectif est de comparer $|\sqrt{43} - 6|$ et $|\sqrt{43} - 7|$. On calcule :

$$(\sqrt{43} - 6)^2 - (\sqrt{43} - 7)^2 = 43 - 12\sqrt{43} + 36 - 43 + 14\sqrt{43} - 49 = -13 + 2\sqrt{43}.$$

On a $13^2 = 169$ et $(2\sqrt{43})^2 = 172$, donc $13^2 \leq (2\sqrt{43})^2$.

Par croissance de la racine carrée, $13 \leq 2\sqrt{43}$ donc $-13 + 2\sqrt{43} \geq 0$, donc $(\sqrt{43} - 6)^2 - (\sqrt{43} - 7)^2 \geq 0$, donc $(\sqrt{43} - 6)^2 \geq (\sqrt{43} - 7)^2$.

Par croissance de la racine carrée, $|\sqrt{43} - 6| \geq |\sqrt{43} - 7|$, donc $\sqrt{43}$ est plus proche de 7.

Fiche n° 42. Représentation graphique des vecteurs

Réponses

42.1 a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

42.2 a) $\vec{u}$ et $\vec{p}$

42.4 $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$

42.1 b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

42.2 b) $\vec{q}$

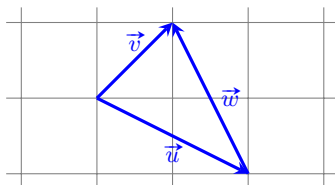
42.5 $\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}$

42.3 $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$

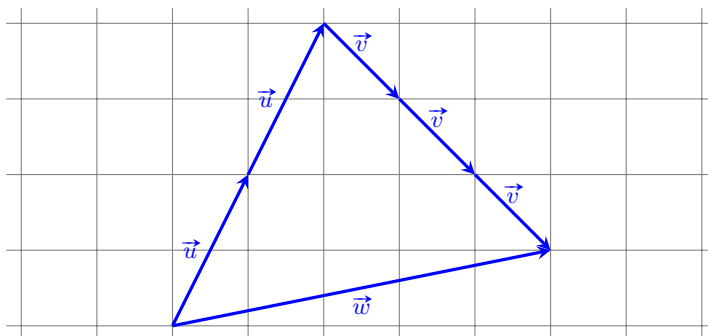
Corrigés

42.2 b) On constate que $\vec{q} = 2\vec{v}$.

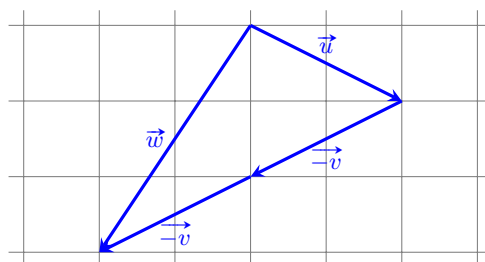
42.3 On peut représenter les choses de la manière suivante :



42.4 On peut représenter les choses de la manière suivante :



42.5 On peut représenter les choses de la manière suivante :



Fiche n° 43. Vecteurs et coordonnées

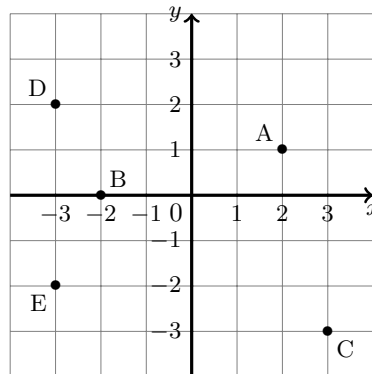
Réponses

- 43.1 a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ 43.3 a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ 43.3 f) $\begin{pmatrix} \frac{29}{2} \\ -\frac{37}{6} \end{pmatrix}$ 43.4 d) .. $\begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ -5 \times 2^{2n+1} \end{pmatrix}$
- 43.1 b) $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ 43.3 b) $\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 43.4 a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ 43.5 a) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- 43.1 c) $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ 43.3 c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 43.4 b) $\begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ -\frac{41}{42} \end{pmatrix}$ 43.5 b) ... $\begin{pmatrix} -\frac{23}{30} \\ -\frac{47}{36} \end{pmatrix}$
- 43.1 d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ 43.3 d) $\begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}$ 43.4 c) $\begin{pmatrix} -7\sqrt{2} \\ \sqrt{3} + 1 \end{pmatrix}$ 43.6 a) -8
- 43.2 a) ... voir corrigé 43.3 e) $\begin{pmatrix} 27 \\ -2 \end{pmatrix}$ 43.6 b) 3
- 43.2 b) .. voir corrigé 43.6 c) $\frac{7}{3}$
- 43.2 c) ... voir corrigé 43.7 a) $(4; -2)$
- 43.7 b) $(-46; -4)$

Corrigés

43.1 a) Pour aller du point A au point B, on se déplace de 5 unités vers la droite et de 3 unités vers le haut. On a donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

43.2 a) Pour placer le point C, on part du point A, on se déplace d'une unité vers la droite et de quatre unités vers le bas. On procède de même pour les autres points. On obtient alors le dessin suivant.



43.3 c) Le vecteur $\vec{u} - \vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5 - 3 \\ 2 - (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

43.3 d) Le vecteur $2\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \times (-6) \\ 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}$.

43.3 e) Le vecteur $3\vec{u} - 2\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \times 5 - 2 \times (-6) \\ 3 \times 2 - 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -2 \end{pmatrix}$.

43.3 f) Le vecteur $-\frac{5}{4}\vec{v} + \frac{7}{3}\vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \times (-6) + \frac{7}{3} \times 3 \\ -\frac{5}{4} \times 4 + \frac{7}{3} \times (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} + 7 \\ -5 - \frac{7}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{2} \\ -\frac{37}{6} \end{pmatrix}$.

43.4 a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 - (-2) \\ -3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

43.4 b) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} - \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{14} - \frac{13}{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{6} - \frac{10}{6} \\ -\frac{15}{42} - \frac{26}{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ -\frac{41}{42} \end{pmatrix}$.

43.4 c) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -3\sqrt{8} - \sqrt{2} \\ \sqrt{3} - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} - \sqrt{2} \\ \sqrt{3} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\sqrt{2} \\ \sqrt{3} + 1 \end{pmatrix}$.

43.4 d) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 2^n - (-2^n) \\ 2^{2n+1} - 3 \times 4^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 2^n \\ 2^{2n+1} - 3 \times 2^{2n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n \\ 2^{2n+1} - 3 \times 2 \times 2^{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ -5 \times 2^{2n+1} \end{pmatrix}.$$

43.5 a) Les coordonnées du point I sont $\left(\frac{3 + (-6)}{2}; \frac{-4 + 5}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

43.5 b) Les coordonnées du point I sont $\left(\frac{\frac{4}{5} + \frac{-7}{3}}{2}; \frac{\frac{-25}{6} + \frac{14}{9}}{2}\right) = \left(\frac{\frac{12}{15} + \frac{-35}{15}}{2}; \frac{\frac{-75}{18} + \frac{28}{18}}{2}\right) = \left(\frac{-23}{30}; \frac{-47}{36}\right)$.

43.6 a) On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ t+4 \end{pmatrix}$. Donc, on a les équivalences $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \iff t+4 = -4 \iff t = -8$.

43.6 b) On a $2\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 4 \\ 7-5t \end{pmatrix}$. Donc, on a les équivalences :

$$2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE} \iff 7-5t = -8 \iff 5t = 15 \iff t = 3.$$

43.6 c) On a $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -3 \\ 3t-1 \end{pmatrix}$ et $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Donc, on a les équivalences :

$$\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \iff 3t-1 = 6 \iff 3t = 7 \iff t = \frac{7}{3}.$$

43.7 a) On note $(x; y)$ les coordonnées de I. On a $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ donc $\begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, d'où $x = 4$ et $y = -2$.

43.7 b) On note $(x; y)$ les coordonnées du point M. On a :

$$\begin{pmatrix} x-7 \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(x-2) - \frac{1}{2}(-4-x) \\ \frac{2}{3}(y+4) - \frac{1}{2}(2-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x - \frac{4}{3} + 2 \\ \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}y + \frac{8}{3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6}x + \frac{2}{3} \\ \frac{7}{6}y + \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Pour conclure, on remarque qu'on a les équivalences $x-7 = \frac{7}{6}x + \frac{2}{3} \iff \frac{1}{6}x = -\frac{23}{3} \iff x = -46$, ainsi que les équivalences $y+1 = \frac{7}{6}y + \frac{5}{3} \iff \frac{1}{6}y = -\frac{2}{3} \iff y = -4$.

Fiche n° 44. Vecteurs colinéaires et déterminant

Réponses

44.1 a)	$\frac{1}{6}$	44.3 d)	$\frac{13}{2}$	44.6 c)	-31
44.1 b)	$-\frac{3}{4}$	44.4 a)	$\frac{1}{3}$	44.6 d)	$\frac{1}{11}$
44.1 c)	$\frac{5}{8}$	44.4 b)	$\frac{1}{2}$	44.7 a)	$x(x-1)$
44.1 d)	8	44.4 c)	$\frac{1}{6}$	44.7 b)	$x^2(4x+2)$
44.2 a)	3	44.5 a)	0	44.7 c)	$(2x-3)(3x-19)$
44.2 b)	$\frac{5}{6}$	44.5 b)	0	44.7 d)	$(9x-4)(9x+4)$
44.3 a)	$-\frac{3}{2}$	44.5 c)	0	44.8 a)	$\left\{0, \frac{3}{5}\right\}$
44.3 b)	$\frac{5}{9}$	44.5 d)	0	44.8 b)	$\left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$
44.3 c)	$\frac{5}{7}$	44.6 a)	3	44.8 c)	$\emptyset$
		44.6 b)	$\frac{1}{15}$	44.8 d)	$\left\{-\frac{11}{6}, \frac{3}{4}\right\}$

Corrigés

44.1 a) On a $2 = 12\lambda$, donc $\lambda = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Comme $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = 2\lambda$, cela confirme que $\lambda = \frac{1}{6}$.

44.1 b) On a $-6 = 8\lambda$, donc $\lambda = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$. Comme $9 = -\frac{3}{4} \times (-12) = -12\lambda$, cela confirme que $\lambda = -\frac{3}{4}$.

44.1 c) On a $-\frac{5}{4} = -2\lambda$, donc $\lambda = \frac{5}{8}$. Comme $\frac{2}{5}\lambda = \frac{2}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, cela confirme que $\lambda = \frac{5}{8}$.

44.2 a) On a $3 = \lambda \times 1$, donc $\lambda = 3$. Comme $-\frac{4}{3}\lambda = -\frac{4}{3} \times 3 = -4$, cela confirme que $\lambda = 3$.

44.2 b) On a $\frac{2}{3} = \frac{4}{5}\lambda$, donc $\lambda = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$. Comme $\frac{6}{5}\lambda = \frac{6}{5} \times \frac{5}{6} = 1$, cela confirme que $\lambda = \frac{5}{6}$.

44.3 a) On a $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$, donc $2\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$, soit $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Ainsi, $\lambda = -\frac{3}{2}$.

44.3 b) On a $4\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{BC}$ et, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
Ainsi, $4\overrightarrow{AB} = 5(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 5\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB}$, soit $9\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AC}$. On en déduit $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{9}\overrightarrow{AC}$, donc $\lambda = \frac{5}{9}$.

44.3 d) On a $5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = -7\overrightarrow{BC}$ et, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
Ainsi, $5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} = -7(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$. En développant et en regroupant, on obtient $\overrightarrow{AB} = \frac{13}{2}\overrightarrow{AC}$, donc $\lambda = \frac{13}{2}$.

44.4 c) On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ et ainsi $\lambda = \frac{1}{6}$.

44.5 d) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) - 1 = 2^2 - (\sqrt{3})^2 - 1 = 4 - 3 - 1 = 0$.

44.6 b) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 1 - 15x$. Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $1 - 15x = 0$; ainsi $x = \frac{1}{15}$.

44.6 c) On a :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times \frac{x+1}{4} + 15 = \frac{x+31}{2}.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\frac{x+31}{2} = 0$; ainsi $x = -31$.

44.6 d) On a :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2x \times \frac{3}{2} - \frac{1}{3}(1 - 2x) = \frac{11x - 1}{3}.$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\frac{11x - 1}{3} = 0$; ainsi $x = \frac{1}{11}$.

44.7 a) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = x(3x + 1) - 2x(x + 1) = x(3x + 1 - 2x - 2) = x(x - 1)$.

44.7 b) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = x^2(5x - 1) - x(x^2 - 3x) = x^2(5x - 1) - x^2(x - 3) = x^2(5x - 1 - x + 3) = x^2(4x + 2)$.

44.7 c) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (8x - 12)(2x - 3) - (2x - 3)(5x + 7) = (2x - 3)(8x - 12 - 5x - 7) = (2x - 3)(3x - 19)$.

44.7 d) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 3x \times 27x - 2 \times 8 = 81x^2 - 16 = (9x - 4)(9x + 4)$.

44.8 a) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = x(x + 3) - 6x^2 = x(x + 3 - 6x) = x(3 - 5x)$. Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff x(3 - 5x) = 0 \iff \left(x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{5} \right).$$

Ainsi, l'ensemble cherché est $\left\{ 0, \frac{3}{5} \right\}$.

44.8 b) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$. Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff (2x - 3)(2x + 3) = 0 \iff x = \pm \frac{3}{2}.$$

Ainsi, l'ensemble cherché est $\left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$.

44.8 c) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (5x + 4)^2 + 1$ et donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) \geq 1 > 0$. Ainsi, l'ensemble cherché est $\emptyset$.

44.8 d) On a $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (9x + 1)^2 - (3x - 10)^2 = (9x + 1 + 3x - 10)(9x + 1 - 3x + 10) = (12x - 9)(6x + 11)$.

Donc, on a les équivalences suivantes :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff (12x - 9)(6x + 11) = 0 \iff \left(x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \text{ ou } x = -\frac{11}{6} \right).$$

Ainsi, l'ensemble cherché est $\left\{ -\frac{11}{6}, \frac{3}{4} \right\}$.

Fiche n° 45. Norme des vecteurs

Réponses

45.1 a)	$\boxed{5}$	45.3 b)	$\boxed{\frac{\sqrt{229}}{10}}$	45.5 a)	$\boxed{\left\{\frac{19}{8}\right\}}$
45.1 b)	$\boxed{2\sqrt{10}}$	45.3 c)	$\boxed{\frac{\sqrt{13}}{4}}$	45.5 b)	$\boxed{\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}}$
45.1 c)	$\boxed{\frac{3}{2}}$	45.3 d)	$\boxed{3\sqrt{14}}$	45.6 a)	$\boxed{\left\{-\frac{2}{7}, \frac{2}{7}\right\}}$
45.1 d)	$\boxed{4}$	45.4 a)	$\boxed{\{-6, 6\}}$	45.6 b)	$\boxed{\left\{-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right\}}$
45.2 a)	$\boxed{5}$	45.4 b)	$\boxed{\{-2, 2\}}$	45.6 c)	$\boxed{\{-4\}}$
45.2 b)	$\boxed{\frac{3\sqrt{5}}{4}}$	45.4 c)	$\boxed{\emptyset}$	45.7 a)	$\boxed{x = -3 \text{ et } x = 3}$
45.2 c)	$\boxed{3\sqrt{10}}$	45.4 d)	$\boxed{\{0\}}$	45.7 b)	$\boxed{x = 5}$
45.3 a)	$\boxed{\sqrt{13}}$				

Corrigés

45.1 d) On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5 - 2\sqrt{15} + 3 + 5 + 2\sqrt{15} + 3} = \sqrt{10 + 6} = \sqrt{16} = 4$.

45.2 b) On a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2} - (-2)\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{45}{16}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{16}} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

45.2 c) On a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AB}\| &= \sqrt{((3\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} - 2))^2 + ((1 - 4\sqrt{2}) - 2\sqrt{2})^2} = \sqrt{(2\sqrt{2} + 3)^2 + (-6\sqrt{2} + 1)^2} \\ &= \sqrt{8 + 12\sqrt{2} + 9 + 72 - 12\sqrt{2} + 1} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.\end{aligned}$$

45.3 b) On a $\vec{u} + \vec{v} \left(\frac{2 + \frac{-9}{5}}{-\frac{1}{2} + 2} \right)$, c'est-à-dire $\vec{u} + \vec{v} \left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{2}} \right)$, d'où $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{229}}{10}$.

45.3 d) On a $\vec{u} + \vec{v} \left(\frac{2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{1 - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 1} \right)$, c'est-à-dire $\vec{u} + \vec{v} \left(\frac{6\sqrt{3}}{-3\sqrt{2}} \right)$, d'où $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + (-3\sqrt{2})^2}$.

Ainsi, on a $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{36 \times 3 + 9 \times 2} = \sqrt{126} = \sqrt{9 \times 14} = 3\sqrt{14}$.

45.4 a) On a :

$$\begin{aligned}AB &= \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{((x - 2) - 1)^2 + (5 - (2 - x))^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (x + 3)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 6x + 9 + x^2 + 6x + 9} = \sqrt{2x^2 + 18}.\end{aligned}$$

Comme $AB = 3\sqrt{10}$, on a donc $\sqrt{2x^2 + 18} = 3\sqrt{10}$ et donc $2x^2 + 18 = (3\sqrt{10})^2$.

Or, on a les équivalences suivantes :

$$2x^2 + 18 = (3\sqrt{10})^2 \iff 2x^2 + 18 = 90 \iff 2x^2 = 72 \iff x^2 = 36 \iff (x = -6 \text{ ou } x = 6).$$

45.4 b) On a $AB = \sqrt{2x^2 + 18}$. Comme $AB = \sqrt{26}$, on a donc $\sqrt{2x^2 + 18} = \sqrt{26}$ et donc $2x^2 + 18 = 26$.

Or, on a les équivalences suivantes : $2x^2 + 18 = 26 \iff 2x^2 = 8 \iff x^2 = 4 \iff (x = -2 \text{ ou } x = 2)$.

45.4 c) On a $AB = \sqrt{2x^2 + 18}$. Comme $AB = 4$, on a donc $\sqrt{2x^2 + 18} = 4$ et donc $2x^2 + 18 = 16$.

Or, on a les équivalences suivantes : $2x^2 + 18 = 16 \iff 2x^2 = -2 \iff x^2 = -1$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

45.4 d) On a $AB = \sqrt{2x^2 + 18}$. Comme $AB = 3\sqrt{2}$, on a donc $\sqrt{2x^2 + 18} = 3\sqrt{2}$ et donc $2x^2 + 18 = (3\sqrt{2})^2$, c'est à dire $2x^2 + 18 = 18$. Or, on a les équivalences : $2x^2 + 18 = 18 \iff 2x^2 = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$.

45.5 a) On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{(x-1)^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 10}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (5-x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 29}$. D'où :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont la même norme} \iff x^2 - 2x + 10 = x^2 - 10x + 29 \iff 8x = 19 \iff x = \frac{19}{8}.$$

45.5 b) On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 1}$. Ainsi, on a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont la même norme} \iff x^2 + 1 = 13 \iff x^2 = 12 \iff (x = -2\sqrt{3} \text{ ou } x = 2\sqrt{3}).$$

45.6 a) On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{(7x)^2 + (\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{49x^2 + 3 + 2\sqrt{2}}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2 + 2^2} = \sqrt{7 + 2\sqrt{2}}$.

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont la même norme} \iff 49x^2 + 3 + 2\sqrt{2} = 7 + 2\sqrt{2} \iff x^2 = \frac{4}{49} \iff \left(x = -\frac{2}{7} \text{ ou } x = \frac{2}{7}\right).$$

45.6 b) On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{4}{x^2} + 1}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. Ainsi, on a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont la même norme} \iff \frac{4}{x^2} + 1 = 25.$$

De plus, comme $x \neq 0$, on a les équivalences suivantes :

$$\frac{4}{x^2} + 1 = 25 \iff \frac{4}{x^2} = 24 \iff \frac{1}{x^2} = 6 \iff x^2 = \frac{1}{6} \iff \left(x = -\frac{\sqrt{6}}{6} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

45.7 a) On a $AB = \sqrt{(5-x)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{(5-x)^2 + 1}$, $AC = \sqrt{(1-x)^2 + (x-1-3)^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (x-4)^2}$. Le triangle ABC est isocèle en A si, et seulement si, $AB = AC$. Ainsi, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \text{ABC est un triangle isocèle en A} &\iff \sqrt{(5-x)^2 + 1} = \sqrt{(1-x)^2 + (x-4)^2} \\ &\iff (5-x)^2 + 1 = (1-x)^2 + (x-4)^2 \\ &\iff x^2 - 10x + 26 = 2x^2 - 10x + 17 \\ &\iff x^2 = 9 \iff (x = -3 \text{ ou } x = 3). \end{aligned}$$

45.7 b) On a $BC = \sqrt{(1-5)^2 + (x-1-4)^2} = \sqrt{16 + (x-5)^2}$ donc $BC^2 = 16 + (x-5)^2$. De même, on a $AC^2 = (1-x)^2 + (x-4)^2$ et $AB^2 = (5-x)^2 + 1$.

Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \text{ABC est rectangle en B} &\iff (1-x)^2 + (x-4)^2 = (5-x)^2 + 1 + 16 + (x-5)^2 \\ &\iff 2x^2 - 10x + 17 = 2x^2 - 20x + 67 \\ &\iff 10x = 50 \iff x = 5. \end{aligned}$$

Fiche n° 46. Relation de Chasles

Réponses

46.1 a)	$\overrightarrow{DC}$	46.4 c)	$-3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}$	46.7 a)	$-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$
46.1 b)	$\overrightarrow{DB}$	46.5 a)	$4\overrightarrow{ED} - 7\overrightarrow{EF}$	46.7 b)	$\frac{3}{4}$
46.1 c)	$8\overrightarrow{CD}$	46.5 b)	$3\overrightarrow{DE} - 7\overrightarrow{DF}$	46.8 a)	$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
46.1 d)	$6\overrightarrow{DB}$	46.5 c)	$4\overrightarrow{FD} + 3\overrightarrow{FE}$	46.8 b)	$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
46.2	$\textcircled{c}$	46.6 a)	$x = -1 \text{ et } y = 1$	46.8 c)	$-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$
46.3 a)	$3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$	46.6 b)	$x = y = \frac{1}{3}$	46.8 d)	$-\frac{5}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$
46.3 b)	$-2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$	46.6 c)	$x = -1 \text{ et } y = \frac{3}{5}$		
46.4 a)	$-2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$	46.6 d)	$x = 0 \text{ et } y = \frac{3}{5}$		
46.4 b)	$-3\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{BC}$				

Corrigés

46.1 a) On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$.

46.1 b) On a $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.

46.1 c) On a :

$$3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BD} + 5\overrightarrow{CD} = 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + 5\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CD} + 5\overrightarrow{CD} = 8\overrightarrow{CD}.$$

46.1 d) On a $4\overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}) = 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{DA} + 6\overrightarrow{AB} = 6(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = 6\overrightarrow{DB}$.

46.2 On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \vec{0} &\iff \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \iff \text{ABCD est un parallélogramme.} \end{aligned}$$

46.3 a) On a $\vec{u} = 3\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA} = 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) - 2\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

46.3 b) On a $\vec{u} = 3\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{BC} - 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = -3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$.

46.4 a) On a :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{CM} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) + 3\overrightarrow{AM} - 5(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}) \\ &= 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA} \\ &= -2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

46.4 b) On a :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 2\vec{BM} + 3\vec{AM} - 5\vec{CM} = 2\vec{BM} + 3(\vec{AB} + \vec{BM}) - 5(\vec{CB} + \vec{BM}) \\ &= 2\vec{BM} + 3\vec{AB} + 3\vec{BM} - 5\vec{CB} - 5\vec{BM} \\ &= 2\vec{BM} + 3\vec{BM} - 5\vec{BM} + 3\vec{AB} + 5\vec{BC} = -3\vec{BA} + 5\vec{BC}.\end{aligned}$$

46.4 c) On a :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 2\vec{BM} + 3\vec{AM} - 5\vec{CM} = 2(\vec{BC} + \vec{CM}) + 3(\vec{AC} + \vec{CM}) - 5\vec{CM} \\ &= 2\vec{BC} + 2\vec{CM} + 3\vec{AC} + 3\vec{CM} - 5\vec{CM} \\ &= 2\vec{BC} + 3\vec{AC} + 2\vec{CM} + 3\vec{CM} - 5\vec{CM} = -3\vec{CA} - 2\vec{CB}.\end{aligned}$$

46.5 a) On a :

$$\begin{aligned}\vec{w} &= 4\vec{GD} + 3\vec{GE} + 7\vec{FG} = 4(\vec{GE} + \vec{ED}) + 3\vec{GE} + 7(\vec{FE} + \vec{EG}) \\ &= 4\vec{GE} + 4\vec{ED} + 3\vec{GE} + 7\vec{FE} + 7\vec{EG} = 7\vec{FE} + 4\vec{ED} + 4\vec{GE} + 3\vec{GE} - 7\vec{GE} \\ &= 4\vec{ED} - 7\vec{EF}.\end{aligned}$$

46.5 b) On a :

$$\begin{aligned}\vec{w} &= 4\vec{GD} + 3\vec{GE} + 7\vec{FG} = 4\vec{GD} + 3(\vec{GD} + \vec{DE}) + 7(\vec{FD} + \vec{DG}) \\ &= 4\vec{GD} + 3\vec{GD} + 3\vec{DE} + 7\vec{FD} + 7\vec{DG} = 4\vec{GD} + 3\vec{GD} - 7\vec{GD} + 3\vec{DE} + 7\vec{FD} \\ &= 3\vec{DE} - 7\vec{DF}.\end{aligned}$$

46.5 c) On a :

$$\begin{aligned}\vec{w} &= 4\vec{GD} + 3\vec{GE} + 7\vec{FG} = 4(\vec{GF} + \vec{FD}) + 3(\vec{GF} + \vec{FE}) - 7\vec{GF} \\ &= 4\vec{GF} + 3\vec{GF} - 7\vec{GF} + 4\vec{FD} + 3\vec{FE} \\ &= 4\vec{FD} + 3\vec{FE}.\end{aligned}$$

46.6 a) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{BM} = \vec{AC} + 2\vec{BA} &\iff \vec{BA} + \vec{AM} = \vec{AC} + 2\vec{BA} \\ &\iff \vec{AM} = \vec{AC} + 2\vec{BA} - \vec{BA} \\ &\iff \vec{AM} = \vec{AC} + \vec{BA} \iff \vec{AM} = -\vec{AB} + \vec{AC}.\end{aligned}$$

46.6 b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0} &\iff \vec{MA} + \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{MA} + \vec{AC} = \vec{0} \\ &\iff 3\vec{MA} + \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0} \\ &\iff \vec{AB} + \vec{AC} = -3\vec{MA} \\ &\iff \vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AM} \iff \vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}.\end{aligned}$$

46.6 c) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}2\vec{AB} - 3\vec{BC} + 5\vec{AM} = \vec{0} &\iff 2\vec{AB} - 3(\vec{BA} + \vec{AC}) + 5\vec{AM} = \vec{0} \\ &\iff 2\vec{AB} - 3\vec{BA} - 3\vec{AC} + 5\vec{AM} = \vec{0} \\ &\iff 5\vec{AB} - 3\vec{AC} + 5\vec{AM} = \vec{0} \\ &\iff 5\vec{AM} = -5\vec{AB} + 3\vec{AC} \iff \vec{AM} = -\vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{AC}.\end{aligned}$$

46.6 d) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{BM} = \vec{0} &\iff 2\overrightarrow{AB} - 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + 5(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) = \vec{0} \\
 &\iff 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{AM} = \vec{0} \\
 &\iff 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AM} = \vec{0} \\
 &\iff 5\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC} \\
 &\iff \overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}.
 \end{aligned}$$

46.7 a) On a :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\
 &= -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.
 \end{aligned}$$

46.7 b) On a $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{4}\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{BN}$.

46.8 a) Comme M est le milieu du segment [BC], on a $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} &\iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
 &\iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\
 &\iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
 &\iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
 &\iff \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.
 \end{aligned}$$

46.8 b) Comme P est le milieu du segment [MC], on a $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$. De plus, M étant le milieu du segment [BC], on a alors $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On a donc $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.
 \end{aligned}$$

46.8 c) Comme S est le symétrique du point B par rapport au point C, le point C est le milieu du segment [BS] et on a alors $\overrightarrow{BS} = 2\overrightarrow{BC}$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\
 &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.
 \end{aligned}$$

46.8 d) D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AS} = -\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) + (-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \\
 &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -\frac{5}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}.
 \end{aligned}$$

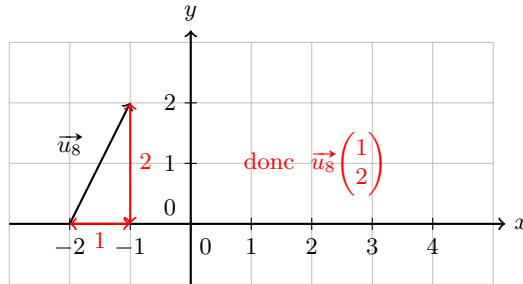
Fiche n° 47. Application des vecteurs à la géométrie

Réponses

47.1 a).....	$\vec{u}_8$	47.4 b).....	2	47.8 a).....	non
47.1 b).....	$\vec{u}_3$	47.4 c).....	-3	47.8 b).....	non
47.1 c).....	$\vec{u}_2$	47.4 d).....	$\frac{1}{2}$	47.8 c).....	oui
47.1 d).....	$\vec{u}_5$	47.4 e).....	$\frac{3}{8}$	47.9 a).....	$-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{5}$
47.1 e).....	$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$	47.4 f).....	$-\frac{2}{11}$	47.9 b).....	$-\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{5}$
47.1 f).....	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	47.5 a).....	oui	47.9 c).....	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{5}$
47.1 g).....	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	47.5 b).....	oui	47.10 a).....	voir corrigé
47.1 h).....	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	47.5 c).....	non	47.10 b).....	voir corrigé
		47.5 d).....	non	47.10 c).....	oui
47.2 a).....	$\sqrt{5}$	47.6 a).....	voir corrigé	47.10 d).....	oui
47.2 b).....	2	47.6 b).....	$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$	47.10 e).....	1
47.2 c).....	$\sqrt{2}$	47.6 c).....	$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	47.11 a).....	$\left(\frac{19}{10} + \sqrt{2}; \frac{11}{7} - \sqrt{2}\right)$
47.2 d).....	$3\sqrt{2}$	47.6 d).....	$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$	47.11 b).....	$\left(\frac{11}{10} - \sqrt{2}; \frac{17}{7} + \sqrt{2}\right)$
47.2 e).....	$\sqrt{13}$	47.6 e).....	$\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$	47.11 c).....	$\left(-\frac{19}{10} + \sqrt{2}; -\frac{11}{7} - \sqrt{2}\right)$
47.2 f).....	$\sqrt{61}$	47.6 f).....	0	47.12 a).....	$\frac{1}{2}\vec{MA} + \frac{1}{2}\vec{MB}$
47.3 a).....	$-\vec{AB} + \vec{AC}$	47.6 g).....	oui	47.12 b).....	$\frac{1}{2}\vec{MA} + \frac{1}{2}\vec{MC}$
47.3 b).....	$\frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$	47.7 a).....	(1; 1)	47.12 c).....	$\frac{1}{2}\vec{MB} + \frac{1}{2}\vec{MC}$
47.3 c).....	$\frac{4}{3}\vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC}$	47.7 b).....	$\left(\frac{5}{2}; 1\right)$	47.12 d).....	$\vec{0}$
47.3 d).....	oui	47.7 c).....	$\left(-\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$	47.12 e).....	$\vec{0}$
47.4 a).....	1	47.7 d).....	oui		

Corrigés

47.1 h) On a :



47.2 a) On a $\|\vec{u}_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

47.2 b) On a $\|\vec{u}_5\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$.

47.2 c) On a $\|\vec{u}_6\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

47.2 d) On a $\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

47.2 e) On a $\|\vec{u}_1 - \vec{u}_5\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

47.3 a) On a $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC}$.

47.3 b) On a $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = -\vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$.

47.3 c) On a $\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{AD} = -\vec{AC} + \frac{4}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{4}{3}\vec{AB} - \frac{4}{3}\vec{AC}$.

47.3 d) On a $\vec{BC} = -\frac{1}{3}\vec{BD}$. Ainsi, les points B, C et D sont alignés.

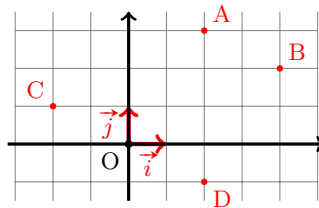
47.4 a) On a $\|\vec{AB}\| = 3$ et $\|\vec{DE}\| = 3$; comme $\vec{AB}$ et $\vec{DE}$ ont le même sens, on a $\lambda = \frac{3}{3} = 1$.

47.4 c) On a $\|\vec{BA}\| = 3$ et $\|\vec{BC}\| = 1$; comme $\vec{BA}$ et $\vec{BC}$ ont un sens opposé, on a $\lambda = -\frac{3}{1} = -3$.

47.5 a) On calcule le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il vaut $2 \times 6 - (-3) \times (-4) = 0$.

47.5 c) On calcule le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il vaut $-\left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{3}{7}\right) - 3 \times 7 = -\frac{3}{28} - 21 \neq 0$.

47.6 a) On a :



47.6 b) On a $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \vec{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, d'après l'expression des coordonnées de A et C.

47.6 c) On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'après l'expression des coordonnées de A et B.

47.6 f) On a, d'après l'expression en coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 2 \times (-2) - 4 \times -1 = 0$.

47.6 g) D'après le calcul précédent, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

47.7 a) On a $M \left(\frac{-2+4}{2}; \frac{1+1}{2} \right) = M(1; 1)$.

47.7 b) On a $N \left(\frac{1+4}{2}; \frac{1+1}{2} \right) = N \left(\frac{5}{2}; 1 \right)$.

47.7 c) On note $C(x; y)$. D'après l'expression vectorielle, on a $\begin{pmatrix} -2-x+2(-1-x) \\ 1-y+2(2-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

47.7 d) On calcule $\overrightarrow{CN} \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MS} \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Ensuite, on calcule le déterminant de $\overrightarrow{CN}$ et $\overrightarrow{MS}$, qui est égal à $\det(\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{MS}) = \frac{7}{2} \times \frac{2}{3} - \frac{7}{3} = 0$. Donc, les droites qui portent ces vecteurs sont parallèles.

47.8 a) On calcule $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 3 \times (-2) - 2 \times 1 = -8 \neq 0$. Ainsi, les droites ne sont pas parallèles.

47.8 b) On calcule $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \left(\sqrt{2} + \frac{20}{3} \right) \times (\sqrt{2} - 1) - 1 \times 0 = -\frac{14}{3} - \frac{17}{3}\sqrt{2} \neq 0$.

47.8 c) On calcule $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{10}{27}\sqrt{5} \right) - \frac{2}{9}\sqrt{5} \times \frac{5}{9} = 0$. Ainsi, les droites sont parallèles.

47.9 a) Dans les trois cas, le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ vaut :

$$(5 - \sqrt{5}) \times \left(2 - \frac{4}{3} \right) - (t - 2) \times (a - 1) = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{3} - at + 2a + t.$$

Il suffit de remplacer avec les valeurs de t et de résoudre l'équation déterminant = 0 pour conclure.

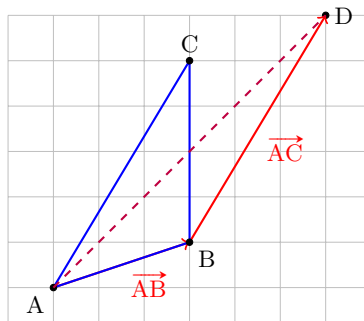
Ici, on a $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{3} + 2a$ et donc il est nul si, et seulement si, $a = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{5}$.

47.9 b) On reprend ce qui précède avec $t = 1$, le déterminant vaut alors $\frac{4 - 2\sqrt{5}}{3} + a + 1$.

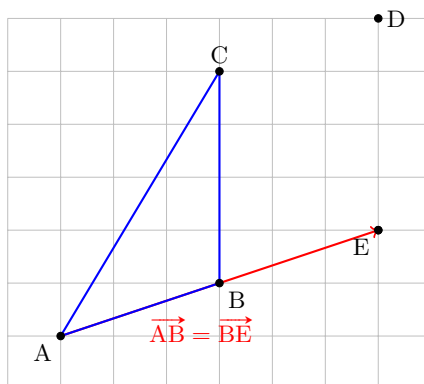
47.9 c) On a :

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 &\iff \frac{4 - 2\sqrt{5}}{3} - a(2 + \sqrt{5}) + 2a + (2 + \sqrt{5}) = 0 \iff \frac{4 - 2\sqrt{5}}{3} + (2 + \sqrt{5}) - a\sqrt{5} = 0 \\ &\iff a\sqrt{5} = \frac{10}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{5} \iff a = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{5}. \end{aligned}$$

47.10 a) On a :



47.10 b) On a :



47.10 c) On a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$.

47.10 d) Par définition de D, c'est un parallélogramme.

47.10 e) Comme ABDC est un parallélogramme, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et donc $\lambda = 1$.

47.11 a) On note $D(x, y)$. ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. Or, on a :

$$\overrightarrow{AB} \left(-\frac{2}{5} - \frac{3}{2} \right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} \left(x - \sqrt{2} \right).$$

Alors, on a l'égalité si $x = \sqrt{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{2} = \frac{19}{10} + \sqrt{2}$ et si $y = -\sqrt{2} - \frac{3}{7} + 2 = \frac{11}{7} - \sqrt{2}$.

47.12 a) On sait que K est le milieu de [AB]. Alors, $\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{AK} = \vec{0}$. De plus, on sait que :

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MK} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} \\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}. \end{aligned}$$

47.12 d) On calcule :

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \vec{0}.$$

47.12 e) On sait que le centre de gravité est le point G tel que $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$ et, par ce qui précède, on a :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}.$$

Fiche n° 48. Barycentres

Réponses

48.1 a).....	$G(4; 8)$	48.2 b).....	$G\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$	48.4 a).....	$\textcircled{c}$
48.1 b).....	$G\left(\frac{5}{7}; -\frac{9}{7}\right)$	48.2 c).....	$G\left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$	48.4 b).....	$\textcircled{b}$
48.1 c).....	$G(2; 6)$	48.3 a).....	$\textcircled{E}$	48.4 c).....	$b = 2 \text{ et } c = 1$
48.1 d).....	$G\left(\frac{19}{12}; \frac{37}{6}\right)$	48.3 b).....	$\textcircled{b} \text{ ou } \textcircled{c}$	48.5 a).....	$(3 + 3\lambda; 3\lambda)$
48.2 a).....	$G(-3; -7)$	48.3 c).....	-3	48.5 b).....	$y_G = x_G - 3$
				48.5 c).....	$3 \leq x_G \leq 6$
				48.5 d).....	$0 \leq y_G \leq 3$

Corrigés

48.1 a) Les pondérations de A et de B sont égales donc G est le milieu de [AB].

48.1 b) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes des coordonnées de A et de B pondérées par les coefficients respectifs fournis : $x_G = \frac{3 \times (-1) + 4 \times 2}{3 + 4}$ et $y_G = \frac{3 \times 5 + 4 \times (-6)}{3 + 4}$.

48.1 c) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes des coordonnées de A et de B pondérées par les coefficients respectifs fournis : $x_G = \frac{\frac{1}{3} \times 2 + \frac{2}{3} \times 2}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}}{1} = 2$ et $y_G = \frac{\frac{1}{3} \times 4 + \frac{2}{3} \times 7}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{14}{3}}{1} = 6$.

48.1 d) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes des coordonnées de A et de B pondérées par les coefficients respectifs fournis :

$$x_G = \frac{\frac{2}{7} \times 1 + \frac{2}{5} \times 2}{\frac{2}{7} + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{2 \times 5}{7 \times 5} + \frac{4 \times 7}{5 \times 7}}{\frac{2 \times 5}{7 \times 5} + \frac{2 \times 7}{5 \times 7}} = \frac{\frac{10}{35} + \frac{28}{35}}{\frac{10}{35} + \frac{14}{35}} = \frac{38}{24} = \frac{19}{12}$$

$$\text{et } y_G = \frac{\frac{2}{7} \times 5 + \frac{2}{5} \times 7}{\frac{2}{7} + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{10 \times 5}{7 \times 5} + \frac{14 \times 7}{5 \times 7}}{\frac{2 \times 5}{7 \times 5} + \frac{2 \times 7}{5 \times 7}} = \frac{\frac{50}{35} + \frac{98}{35}}{\frac{10}{35} + \frac{14}{35}} = \frac{148}{24} = \frac{37}{6}.$$

48.2 a) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes des coordonnées de A, de B et de C pondérées par les coefficients respectifs fournis : $x_G = \frac{3 \times 1 - 4 \times 2 + 2 \times 1}{3 - 4 + 2} = -3$ et $y_G = \frac{3 \times 5 - 4 \times 6 + 2 \times 1}{3 - 4 + 2} = -7$.

48.2 b) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes des coordonnées de A, de B et de C pondérées par les coefficients respectifs fournis : $x_G = \frac{1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 1}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}$ et $y_G = \frac{1 \times 0 + 1 \times 2 + 1 \times 3}{1 + 1 + 1} = \frac{5}{3}$.

48.2 c) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes des coordonnées de A, de B et de C pondérées par les coefficients respectifs fournis : $x_G = \frac{2 \times 3 + 3 \times (-5) + 5 \times 1}{2 + 3 + 5} = \frac{-2}{5}$ et $y_G = \frac{2 \times 6 + 3 \times 2 + 5 \times (-4)}{2 + 3 + 5} = \frac{-1}{5}$.

48.3 a) Les deux coefficients sont positifs donc le point cherché est entre A et B. La pondération de B est plus importante que celle de A ; donc, le point est plus proche de B donc le point cherché est E.

48.3 b) Le point D est le milieu du segment [AB], ce qui revient à dire que les coefficients affectés à A et à B, dans le barycentre, sont égaux.

48.3 c) La coordonnée de F se calcule en faisant la moyenne des coordonnées de A et de B pondérée par les coefficients respectifs fournis : $6 = \frac{1 \times 0 + b \times 4}{1 + b}$, qui se simplifie en $6 \times (1 + b) = 4b$.

48.4 a) On cherche le milieu du segment [AC].

48.4 b) Les coefficients barycentriques des points B et C sont égaux et non nuls donc on cherche le milieu du segment [BC].

48.4 c) On sait que D est le barycentre de (A, -1), (B, b) et (C, c). Par définition, on obtient :

$$-\overrightarrow{DA} + b \overrightarrow{DB} + c \overrightarrow{DC} = \vec{0},$$

avec $-1 + b + c \neq 0$. Pour les coordonnées des vecteurs, cette dernière égalité équivaut à :

$$-\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci équivaut à $-4 + 2b + 0c = 0$ et $0 - 2b + 4c = 0$. On obtient $b = 2$ et $c = 1$. Une autre méthode permet de calculer les coordonnées de D par les moyennes des coordonnées de A, de B et de C pondérées par les coefficients respectifs fournis. On obtient les équations :

$$3 = \frac{-1 \times 7 + b \times 5 + c \times 3}{-1 + b + c} \quad \text{et} \quad 2 = \frac{-1 \times 2 + b \times 0 + c \times 6}{-1 + b + c}.$$

Or, on sait que la définition du barycentre impose $-1 + b + c \neq 0$. Ce système est donc équivalent à :

$$\begin{cases} -7 + 5b + 3c = -3 + 3b + 3c \\ -2 + 6c = -2 + 2b + 2c. \end{cases}$$

On obtient de même $b = 2$ et $c = 1$.

48.5 a) Les coordonnées de G se calculent par les moyennes des coordonnées de A et de B pondérées par les coefficients respectifs fournis :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{(1 - \lambda) \times 3 + \lambda \times 6}{1 - \lambda + \lambda} = \frac{3 + 3\lambda}{1} \\ \text{et} \quad y_G &= \frac{(1 - \lambda) \times 0 + \lambda \times 3}{1 - \lambda + \lambda} = \frac{3\lambda}{1}. \end{aligned}$$

48.5 b) Les coordonnées de G sont $x_G = 3 + 3\lambda$ et $y_G = 3\lambda$. Dans x_G , on remplace 3λ par y_G . On obtient $x_G = 3 + y_G$. Il reste à isoler y_G , d'où $y_G = x_G - 3$.

48.5 c) On a obtenu précédemment $x_G = 3 + 3\lambda$. On considère $0 \leq \lambda \leq 1$. En multipliant par 3, qui est positif, chacun des membres des inégalités, on obtient $0 \leq 3\lambda \leq 3$. Il reste à ajouter 3 à chacun de ces membres.

48.5 d) On a obtenu précédemment $y_G = x_G - 3$. Pour $0 \leq \lambda \leq 1$, on a aussi, d'après la question précédente, $3 \leq x_G \leq 6$. Donc, en soustrayant 3 à chaque membre de l'inégalité, on a $0 \leq y_G \leq 3$.

Fiche n° 49. Vecteurs directeurs d'une droite

Réponses

49.1 a) voir corrigé

49.1 b) voir corrigé

49.1 c) voir corrigé

49.2 a) $y = -4x + 5$

49.2 b) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

49.2 c) $y = 4$

49.2 d) $x = 3$

49.2 e) $y = x - 2$

49.3 a) (a), (b) et (c)

49.3 b) (b)

49.3 c) (a), (b) et (d)

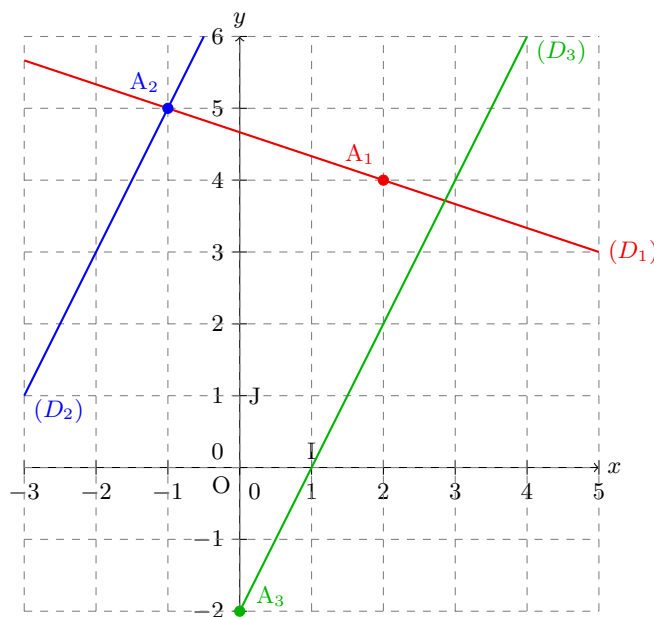
49.4 (c) et (d)

49.5 a) (b)

49.5 b) (a) et (b)

Corrigés

49.1 a)



49.2 a) Le vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ permet de trouver le coefficient directeur ; c'est $m = \frac{4}{-1} = -4$.

L'équation réduite est donc de la forme $y = -4x + p$. Comme le point $A(2; -3)$ appartient à (D) , en effectuant « $x = 2$ et $y = -3$ » dans l'équation, on a $-3 = -4 \times 2 + p$; on en déduit que $p = -3 + 8 = 5$.

L'équation réduite est donc $y = -4x + 5$.

49.2 b) Le vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ permet de trouver le coefficient directeur ; c'est $m = \frac{-3}{2}$.

L'équation réduite est donc de la forme $y = -\frac{3}{2}x + p$. Comme le point $A(-1; 5)$ appartient à (D) , en effectuant « $x = -1$ et $y = 5$ » dans l'équation, on a $5 = -\frac{3}{2} \times (-1) + p$; on en déduit que $p = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

L'équation réduite est donc $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$.

49.2 c) Le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ correspond à une droite horizontale, avec pour coefficient directeur $m = 0$. L'équation réduite est donc $y = 4$.

49.2 d) Le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ correspond à une droite verticale. Dans ce cas, la droite n'admet pas d'équation de la forme $y = mx + p$; son équation réduite est $x = 3$.

49.2 e) Le vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ permet de trouver le coefficient directeur $m = \frac{1}{1} = 1$.

L'équation réduite est donc de la forme $y = x + p$. Comme le point $A(-2; -4)$ appartient à (D) , en effectuant « $x = -2$ et $y = -4$ » dans l'équation, on a $-4 = 1 \times (-2) + p$; on en déduit que $p = -4 + 2 = -2$.

L'équation réduite est donc $y = x - 2$.

49.3 a) Un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Dans notre cas, on trouve ainsi que $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (D) . Les autres bonnes réponses correspondent aux vecteurs colinéaires à $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

49.3 b) Une droite parallèle à l'axe des abscisses a pour équation $y = c$ et pour vecteur directeur tout vecteur de la forme $\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $k \neq 0$. Ici, seul $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

49.3 c) Grâce à l'équation de (D) , on voit que $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur. Les vecteurs colinéaires à ce vecteur directeur sont $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_4$.

49.4 Le vecteur $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (MN) . Deux droites sont parallèles si deux de leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.

Pour la droite d'équation $-8x - 6y + 3 = 0$, un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Pour la droite d'équation $4x + 3y - 1 = 0$, un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

49.5 a) La droite (D) est parallèle à (Δ) : elles ont donc mêmes vecteurs directeurs. L'équation de (D) est donc de la forme $3x + 2y + c = 0$. Comme le point $A(-2; 4)$ appartient à (D) , en effectuant « $x = -2$ et $y = 4$ » dans l'équation, on a $3(-2) + 2(4) + c = 0$; on en déduit que $c = -2$.

L'équation cartésienne de (D) est donc $3x + 2y - 2 = 0$.

49.5 b) La droite (D) est parallèle à (Δ) : elles ont donc mêmes vecteurs directeurs. L'équation de (D) est donc de la forme $6x - 2y + c = 0$. Comme le point $A(0; 0)$ appartient à (D) , en effectuant « $x = 0$ et $y = 0$ » dans l'équation $6x - 2y + c = 0$, on obtient $c = 0$.

L'équation cartésienne de (D) est donc $6x - 2y = 0$.

On peut simplifier cette équation en divisant par 2 et obtenir $3x - y = 0$.

Fiche n° 50. Équations de droites

Réponses

50.1	(a) et (b)	50.7 a)	4	50.12 a)	(b)
50.2 a)	(c)	50.7 b)	-3	50.12 b)	$y = -2x - 3$
50.2 b)	(d)	50.7 c)	$\frac{5}{3}$	50.12 c)	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
50.2 c)	$\frac{3}{-5}$	50.7 d)	$-\frac{2}{3}$	50.12 d)	$y = 3x - 5$
50.2 d)	$\frac{5}{4}$	50.8 a)	2	50.13 a)	$y = -x + 3$
50.2 e)	0	50.8 b)	$\frac{5}{3}$	50.13 b)	$y = 3$
50.3 a)	non	50.8 c)	-7	50.13 c)	$y = \frac{3}{4}x - 1$
50.3 b)	oui	50.9 a)	voir corrigé	50.13 d)	$y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$
50.3 c)	oui	50.9 b)	voir corrigé	50.13 e)	$y = -5x - 7$
50.4 a)	$(-\frac{3}{2}; 0)$	50.9 c)	voir corrigé	50.14 a)	(a)
50.4 b)	$(\frac{3}{2}; 0)$	50.9 d)	voir corrigé	50.14 b)	$y = 6x - 2$
50.4 c)	$(-2^{n-1}; 0)$	50.10 a)	voir corrigé	50.14 c)	$y = -2x + 1$
50.5	(d)	50.10 b)	voir corrigé	50.14 d)	$y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}$
50.6 a)	$\frac{2}{3}$	50.10 c)	voir corrigé	50.15 a)	(c)
50.6 b)	$-\frac{2}{9}$	50.10 d)	voir corrigé	50.15 b)	$y = \frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$
50.6 c)	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	50.11 a)	voir corrigé	50.15 c)	$y = -\frac{17}{38}x + \frac{11}{19}$
		50.11 b)	voir corrigé	50.15 d)	$y = 2^{6n+12}$
		50.11 c)	voir corrigé		
		50.11 d)	voir corrigé		

Corrigés

50.2 b) Les points A(-1; 0) et B(1; -3) appartiennent à (D_2) donc la pente est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 0}{1 - (-1)} = \frac{-3}{2}$.

50.2 e) La droite (D_5) est horizontale donc sa pente vaut 0.

50.3 a) On a $2 \times 2 + 3 \times (-1) + 1 = 2 \neq 0$ donc le point A n'appartient pas à la droite (D) .

50.3 c) On a $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 4 \times \frac{-1}{3} + \frac{7}{12} = \frac{9}{12} - \frac{16}{12} + \frac{7}{12} = 0$ donc le point A appartient à la droite (D) .

50.4 a) On note $M(x; y)$ le point d'intersection de (D) avec l'axe des abscisses. Comme M appartient à l'axe des abscisses, on a $y = 0$. Comme M appartient aussi à (D) , on a $4x + y + 6 = 0$, donc $4x + 6 = 0$, d'où $x = -\frac{3}{2}$.

50.4 c) On note $M(x; y)$ le point d'intersection de (D) avec l'axe des abscisses. Comme M appartient à l'axe des abscisses, on a $y = 0$. Comme M appartient aussi à (D) , on a $2 \times 4^{n+1}x - 3^{2n-1}y + 2^{3n+2} = 0$, donc $2^{2n+3}x + 2^{3n+2} = 0$, d'où $x = -\frac{2^{3n+2}}{2^{2n+3}} = -2^{n-1}$.

50.5 La pente de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - (-1)}{-1 - 2} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$.

50.6 a) La pente de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - (-10)}{5 - (-7)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

50.6 b) La pente de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{-1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{6} - \frac{2}{6}}{\frac{-1}{4} - \frac{2}{4}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{-3}{4}} = -\frac{1}{6} \times \frac{4}{3} = -\frac{2}{3 \times 3} = -\frac{2}{9}$.

50.6 c) La pente de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{24}}{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2 \times \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

50.7 b) L'équation réduite de (D) étant $y = -3x + 2$, sa pente vaut -3 .

50.7 c) L'équation réduite de (D) étant $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$, sa pente vaut $\frac{5}{3}$.

50.7 d) L'équation réduite de (D) étant $y = -\frac{8}{12}x - \frac{3}{12}$, soit $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$, sa pente vaut $-\frac{2}{3}$.

50.8 a) On a les équivalences suivantes : $A \in (D) \iff -m + (3 - m) + 1 = 0 \iff -2m + 4 = 0 \iff m = 2$.

50.8 c) On a les équivalences suivantes :

$$A \in (D) \iff (-m^2 - 2m + m + 2) + (4m^2 - 9) - 3m^2 = 0 \iff -m - 7 = 0 \iff m = -7.$$

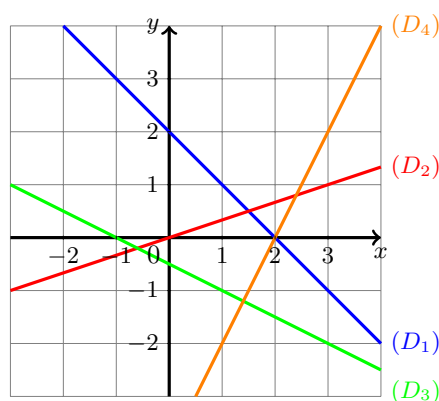
50.9 a)

La droite (D_1) a pour équation réduite $y = -x + 2$ donc elle passe par les points $A(0; 2)$ et $B(1; 1)$ par exemple.

La droite (D_2) a pour équation réduite $y = \frac{1}{3}x$ donc elle passe par les points $O(0; 0)$ et $B(3; 1)$ par exemple.

La droite (D_3) a pour équation réduite $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ donc elle passe par les points $A(1; -1)$ et $B(-1; 0)$ par exemple.

La droite (D_4) a pour équation réduite $y = 2x - 4$ donc elle passe par les points $A(1; -2)$ et $B(2; 0)$ par exemple.



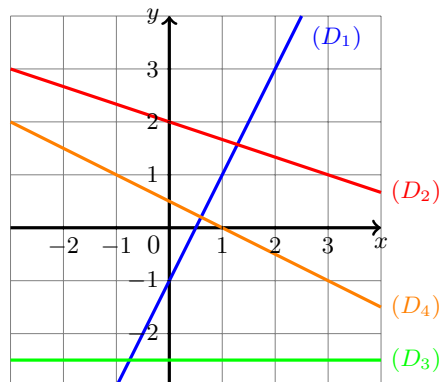
50.10 a)

La droite (D_1) passe par les points $A(0; -1)$ et $B(1; 1)$ par exemple.

La droite (D_2) passe par les points $A(0; 2)$ et $B(3; 1)$ par exemple.

La droite (D_3) est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point $A\left(0; -\frac{5}{2}\right)$ par exemple.

La droite (D_4) passe par les points $A(-1; 1)$ et $B(1; 0)$ par exemple.



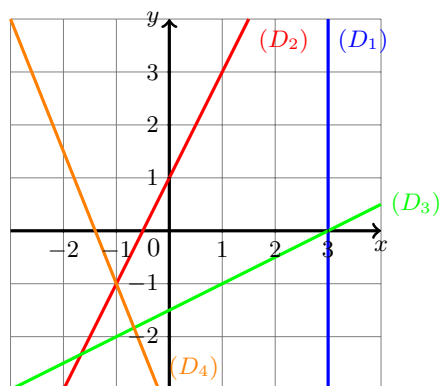
50.11 a)

La droite (D_1) est parallèle à l'axe des ordonnées et passe par le point $A(3; 0)$ par exemple.

La droite (D_2) passe par les points $A(0; 1)$ et $B(1; 3)$ par exemple.

La droite (D_3) passe par les points $A(3; 0)$ et $B(1; -1)$ par exemple.

La droite (D_4) passe par les points $A(-1; -1)$ et $B(-3; 4)$ par exemple.



50.12 a) Les points $A(0; 2)$ et $B(1; 3)$ appartiennent à la droite (D_1) donc la pente est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{1 - 0} = 1$.
De plus, l'ordonnée à l'origine vaut 2. L'équation réduite de (D_1) est donc $y = 1 \times x + 2$.

50.12 b) Les points $A(-1; -1)$ et $B(0; -3)$ appartiennent à (D_2) donc la pente est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - (-1)}{0 - (-1)} = -2$.
De plus, l'ordonnée à l'origine vaut -3 . L'équation réduite de (D_2) est donc $y = -2x - 3$.

50.12 c) Les points $A(-1; 1)$ et $B(1; 0)$ appartiennent à (D_3) donc la pente est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 1}{1 - (-1)} = -\frac{1}{2}$.

Il existe donc un réel b tel que l'équation réduite de (D_3) est $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Or, le point B appartient à (D_3) donc on a $y_B = -\frac{1}{2}x_B + b$, d'où $b = y_B + \frac{1}{2}x_B = \frac{1}{2}$.

50.12 d) Les points $A(1; -2)$ et $B(2; 1)$ appartiennent à la droite (D_4) donc la pente est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - (-2)}{2 - 1} = 3$.

Il existe donc un réel b tel que l'équation réduite de (D_4) est $y = 3x + b$.

Or, le point B appartient à (D_4) donc on a $y_B = 3x_B + b$, d'où $b = y_B - 3x_B = -5$.

50.13 a) Les points $A(2; 1)$ et $B(1; 2)$ appartiennent à (D_1) donc la pente est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 1}{1 - 2} = -1$.

De plus, l'ordonnée à l'origine vaut 3. L'équation réduite de (D_1) est donc $y = -x + 3$.

50.13 b) La droite (D_2) est parallèle à l'axe des abscisses donc sa pente vaut 0. De plus, l'ordonnée à l'origine vaut 3. L'équation réduite de (D_2) est donc $y = 3$.

50.13 c) Les points $A(0; -1)$ et $B(4; 2)$ appartiennent à (D_3) donc la pente est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-1)}{4 - 0} = \frac{3}{4}$.
De plus, l'ordonnée à l'origine vaut -1 .

50.13 d) Les points $A(-2; 1)$ et $B(3; -2)$ appartiennent à (D_4) donc la pente est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 1}{3 - (-2)} = \frac{-3}{5}$.

Il existe donc un réel b tel que l'équation réduite de (D_4) est $y = -\frac{3}{5}x + b$.

Or, le point B appartient à (D_4) donc on a $y_B = -\frac{3}{5}x_B + b$, d'où $b = y_B + \frac{3}{5}x_B = -2 + \frac{9}{5} = -\frac{1}{5}$.

50.13 e) Les points $A(-2; 3)$ et $B(-1; -2)$ appartiennent à (D_5) donc la pente est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 3}{-1 - (-2)} = -5$.

Il existe donc un réel b tel que l'équation réduite de (D_5) est $y = -5x + b$.

Or, le point B appartient à (D_5) donc on a $y_B = -5x_B + b$, d'où $b = y_B + 5x_B = -7$.

50.14 a) Il existe un réel b tel que l'équation réduite de la droite (D) est $y = 3x + b$.

Or, le point A appartient à (D) donc on a $y_A = 3x_A + b$, d'où $b = y_A - 3x_A = -1$.

50.14 b) Il existe un réel b tel que l'équation réduite de (D) est $y = 6x + b$.

Or, le point A appartient à (D) donc on a $y_A = 6x_A + b$, d'où $b = y_A - 6x_A = -2$.

50.14 c) Il existe un réel b tel que l'équation réduite de (D) est $y = -2x + b$.

Or, le point A appartient à (D) donc on a $y_A = -2x_A + b$, d'où $b = y_A + 2x_A = 1$.

50.14 d) Il existe un réel b tel que l'équation réduite de (D) est $y = \frac{3}{2}x + b$.

Or, le point A appartient à (D) donc on a $y_A = \frac{3}{2}x_A + b$, d'où $b = y_A - \frac{3}{2}x_A = \frac{7}{8}$.

50.15 a) La pente de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - (-1)}{0 - (-2)} = 2$. De plus, l'ordonnée à l'origine vaut 3.

50.15 b) La pente de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 2}{5 - (-3)} = \frac{1}{4}$.

Il existe donc un réel b tel que l'équation réduite de (AB) est $y = \frac{1}{4}x + b$.

Or, le point A appartient à (AB) donc on a $y_A = \frac{1}{4}x_A + b$, d'où $b = y_A - \frac{1}{4}x_A = \frac{11}{4}$.

50.15 c) La pente de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{5}{4} - (-\frac{1}{6})}{-\frac{3}{2} - \frac{5}{3}} = \frac{\frac{15+2}{12}}{\frac{-9-10}{6}} = \frac{17}{12} \times \frac{6}{-19} = -\frac{17}{38}$.

Il existe donc un réel b tel que l'équation réduite de (AB) est $y = -\frac{17}{38}x + b$.

Or, le point B appartient à (AB) donc on a $y_B = -\frac{17}{38}x_B + b$, d'où $b = y_B + \frac{17}{38}x_B = \frac{5}{4} - \frac{51}{76} = \frac{95 - 51}{76} = \frac{11}{19}$.

50.15 d) On a $y_A = (2^2)^{3n+6} = 2^{6n+12}$ et $y_B = (2^3)^{2n+4} = 2^{6n+12}$. La pente de la droite (AB) est donc égale à $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 0$. L'équation réduite de (AB) est donc $y = y_B = 2^{6n+12}$.

Fiche n° 51. Droites parallèles et équations de droites

Réponses

51.1	☐ a) et ☐ c)	51.4 b)	☐ $\frac{2}{7}$	51.8 d)	☐ oui
51.2 a)	☐ $\frac{5}{4}$	51.4 c)	☐ $-\frac{1}{77}$	51.9 a)	☐ $\frac{4}{3}$
51.2 b)	☐ $-\frac{5}{4}$	51.4 d)	☐ (D_2)	51.9 b)	☐ 2
51.2 c)	☐ oui	51.5	☐ b)	51.9 c)	☐ $-\frac{6}{13}$
51.3 a)	☐ $-\frac{5}{14}$	51.6	☐ b)	51.10 a)	☐ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
51.3 b)	☐ $-\frac{5}{14}$	51.7 a)	☐ oui	51.10 b)	☐ $y = -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5}$
51.3 c)	☐ oui	51.7 b)	☐ non	51.10 c)	☐ $\frac{23}{11}$
51.4 a)	☐ $\frac{3}{11}$	51.7 c)	☐ oui	51.10 d)	☐ $\frac{6}{11}$
		51.8 a)	☐ non		
		51.8 b)	☐ oui		
		51.8 c)	☐ non		

Corrigés

51.2 a) La pente de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 2}{5 - 1} = \frac{-5}{4}$.

51.2 b) La pente de la droite (CD) est $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-3 - 7}{6 - (-2)} = \frac{-10}{8} = \frac{-5}{4}$.

51.2 c) Les droites (AB) et (CD) ont la même pente ; elles sont donc parallèles.

51.3 a) La pente de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{1}{6} - (-\frac{1}{4})}{\frac{1}{2} - \frac{5}{3}} = \frac{\frac{2+3}{12}}{\frac{6-20}{12}} = \frac{5}{-14} = -\frac{5}{14}$.

51.3 b) La pente de la droite (AC) est $\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{\frac{11}{6} - (-\frac{1}{4})}{-\frac{25}{6} - \frac{5}{3}} = \frac{\frac{22+3}{12}}{\frac{-50-20}{12}} = \frac{25}{-70} = -\frac{5}{14}$.

51.3 c) Les droites (AB) et (AC) ont la même pente et passent toutes deux par le point A. Donc, elles sont confondues. Les points A, B et C sont donc alignés.

51.4 a) La pente de la droite (D_1) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-1)}{4 - (-7)} = \frac{3}{11}$.

51.4 b) La pente de la droite (D_2) est $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0 - (-2)}{3 - (-4)} = \frac{2}{7}$.

51.4 c) On a $\frac{3}{11} - \frac{2}{7} = \frac{21}{77} - \frac{22}{77} = \frac{-1}{77}$.

51.4 d) On a $\frac{3}{11} - \frac{2}{7} < 0$ donc $\frac{3}{11} < \frac{2}{7}$. La pente de (D_1) est donc plus petite que celle de (D_2) .

51.5 Les points $A(-6; -1)$ et $B(5; 4)$ appartiennent à (D_1) donc la pente de la droite (D_1) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5}{11}$. De même, les points $C(-3; -2)$ et $D(6; 2)$ appartiennent à (D_2) donc la pente de la droite (D_2) est $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{4}{9}$. Or, on a $\frac{5}{11} = \frac{45}{99} > \frac{44}{99} = \frac{4}{9}$; donc, la pente de (D_1) est plus grande que celle de (D_2) .

51.6 Les points $A(-5; 0)$ et $B(6; 4)$ appartiennent à (D_1) donc la pente de la droite (D_1) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4}{11}$. De même, les points $C(-7; -3)$ et $D(7; 2)$ appartiennent à (D_2) donc la pente de la droite (D_2) est $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{5}{14}$. Or, on a $\frac{4}{11} = \frac{56}{11 \times 14} > \frac{55}{11 \times 14} = \frac{5}{14}$; donc, la pente de (D_1) est plus grande que celle de (D_2) .

51.7 a) La pente de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 5}{-5 - (-3)} = \frac{-8}{-2} = 4$. La pente de la droite (CD) est égale à $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-1 - (-5)}{2 - 1} = 4$. Les droites (AB) et (CD) ont la même pente donc elles sont parallèles.

51.7 b) La pente de la droite (BC) est $\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-5 - (-3)}{1 - (-5)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$. La pente de la droite (DE) est égale à $\frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{2 - (-1)}{-10 - 2} = \frac{3}{-12} = -\frac{1}{4}$. Les droites (BC) et (DE) n'ont pas la même pente : elles ne sont donc pas parallèles.

51.7 c) La pente de la droite (AB) vaut 4. La pente de la droite (AF) est $\frac{y_F - y_A}{x_F - x_A} = \frac{1 - 5}{-4 - (-3)} = \frac{-4}{-1} = 4$. Les droites (AB) et (AF) ont la même pente et passent toutes deux par le point A : elles sont donc confondues. Ainsi, les points A , B et F sont alignés.

51.8 a) La pente de (D_1) vaut 3 et la pente de (D_2) vaut 2. Les droites (D_1) et (D_2) n'ont pas la même pente et ne sont donc pas parallèles.

51.8 b) L'équation réduite de (D_1) est $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$; donc, la pente de (D_1) vaut $\frac{2}{3}$. L'équation réduite de (D_2) est $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$; donc, la pente de (D_2) vaut $\frac{2}{3}$. Ainsi, les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

51.8 c) L'équation réduite de (D_1) est $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{8}$; donc, la pente de (D_1) vaut $-\frac{3}{2}$. L'équation réduite de (D_2) est $y = -2x + \frac{5}{4}$; donc, la pente de (D_2) vaut -2 . Ainsi, les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas parallèles.

51.8 d) L'équation réduite de (D_1) est $y = \frac{14}{5} \left(-\frac{6}{35}x + \frac{193}{35} \right) = -\frac{2}{5} \times \frac{6}{5}x + \frac{14}{5} \times \frac{193}{35}$; donc, la pente de (D_1) vaut $-\frac{12}{25}$. L'équation réduite de (D_2) est $y = \frac{4}{11} \left(-\frac{33}{25}x + \frac{147}{23} \right) = -4 \times \frac{3}{25}x + \frac{4}{11} \times \frac{147}{23}$; donc, la pente de (D_2) vaut $-\frac{12}{25}$. Les droites (D_1) et (D_2) ont la même pente : elles sont donc parallèles.

51.9 a) Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles si, et seulement si, elles ont la même pente. Cela équivaut à avoir l'égalité $5 = 3m + 1$, c'est-à-dire $m = \frac{4}{3}$.

51.9 b) Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles si, et seulement si, elles ont la même pente, si, et seulement si, on a l'égalité $m + 1 = 2m - 1$, c'est-à-dire $2 = m$.

51.9 c) On suppose ici qu'on a $m \neq -\frac{1}{2}$. L'équation réduite de (D_1) est $y = \frac{m}{6}x + \frac{1}{3}$ et l'équation réduite de (D_2) est $y = -(2m+1)x + 4(2m+1)$. Or, on a les équivalences : $\frac{m}{6} = -(2m+1) \iff \frac{13m}{6} = -1 \iff m = -\frac{6}{13}$. Ainsi, les droites (D_1) et (D_2) ont la même pente si, et seulement si, on a $m = -\frac{6}{13}$.

51.10 a) Les points $A(1; 0)$ et $B(3; 1)$ appartiennent à la droite (D_1) , dont la pente est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0}{3 - 1} = \frac{1}{2}$.

On peut donc fixer un réel b tel que l'équation réduite de la droite (D_1) soit $y = \frac{1}{2}x + b$. Comme le point A appartient à (D_1) , on a $y_A = \frac{1}{2}x_A + b$ et donc $b = y_A - \frac{1}{2}x_A = -\frac{1}{2}$.

L'équation réduite de (D_1) est donc $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

51.10 b) Les points $C(-2; 3)$ et $D(3; 0)$ appartiennent à (D_2) , dont la pente est $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0 - 3}{3 - (-2)} = -\frac{3}{5}$.

On peut donc fixer un réel b tel que l'équation réduite de la droite (D_2) soit $y = -\frac{3}{5}x + b$. Comme le point D appartient à (D_2) , on a $y_D = -\frac{3}{5}x_D + b$ et donc $b = y_D + \frac{3}{5}x_D = \frac{9}{5}$.

L'équation réduite de (D_2) est donc $y = -\frac{3}{5}x + \frac{9}{5}$.

51.10 c) Comme le point d'intersection appartient aux deux droites, on a $\frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2} = y_0 = -\frac{3}{5}x_0 + \frac{9}{5}$. On a donc la relation $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right)x_0 = \frac{1}{2} + \frac{9}{5}$, d'où $\frac{5+6}{10}x_0 = \frac{5+18}{10}$, c'est-à-dire $x_0 = \frac{23}{11}$.

51.10 d) On a alors $y_0 = \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{2} = \frac{23}{22} - \frac{11}{22} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$.

Fiche n° 52. Proportions

Réponses

52.1 a) .. $0,25 = 25\%$	52.2 c) $\frac{3}{10}$	52.4 a) $\frac{8}{6}$	52.6 b) $\frac{13}{50}$
52.1 b) ... $0,5 = 50\%$	52.2 d) 150%	52.4 b) $\frac{6}{50\%}$	52.6 c) $0,08$
52.1 c) ... $0,2 = 20\%$	52.3 a) $0,425$	52.5 a) 60	52.7 600
52.1 d) .. $0,17 = 17\%$	52.3 b) 30%	52.5 b) $2\,300$	52.8 a) $\frac{n}{Np}$
52.2 a) 32%	52.3 c) $\frac{1}{8}$	52.5 c) 36	52.8 b) $\frac{N-n}{N}$
52.2 b) $0,83$		52.6 a) $12,5\%$	

Corrigés

52.1 a) Le nombre 25 % signifie $\frac{25}{100}$ dont l'écriture fractionnaire peut se simplifier en $\frac{1}{4}$.

52.1 b) L'écriture fractionnaire $\frac{1}{2}$ peut aussi s'écrire $\frac{50}{100}$. Donc, $\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 0,5 = 50\%$.

52.1 c) L'écriture fractionnaire $\frac{1}{5}$ peut aussi s'écrire $\frac{20}{100}$. Donc, $\frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 0,2 = 20\%$.

52.1 d) L'écriture fractionnaire $\frac{34}{200}$ peut aussi s'écrire $\frac{17}{100}$. Donc, $\frac{34}{200} = \frac{17}{100} = 0,17 = 17\%$.

52.2 a) Le nombre 0,32 peut s'écrire sous forme fractionnaire $\frac{32}{100}$, ce qui donne le pourcentage 32 %.

52.2 b) Le pourcentage 83 % peut s'écrire sous forme fractionnaire $\frac{83}{100}$, ce qui donne le nombre décimal 0,83.

52.2 c) Le pourcentage 30 % peut s'écrire sous forme fractionnaire $\frac{30}{100}$, ce qui se simplifie en $\frac{3}{10}$.

52.2 d) On a $\frac{3}{2} = \frac{3 \times 50}{2 \times 50} = \frac{150}{100} = 150\%$.

52.3 a) La Mairie a acheté 850 géraniums parmi 2 000 plants, soit une proportion de $\frac{850}{2\,000}$. On pourra poser la division pour obtenir $\frac{850}{2\,000} = 0,425$.

52.3 b) La Mairie a acheté 600 bégonias parmi 2 000 plants, soit une proportion de $\frac{600}{2\,000}$. La simplification de la fraction donne $\frac{600}{2\,000} = \frac{60}{200} = \frac{30}{100}$, autrement dit 30 %.

52.3 c) La Mairie a acheté 250 dipladénias, autrement dit une proportion de $\frac{250}{2\,000}$, soit $\frac{1}{8}$ après simplification.

52.4 a) Le fait qu'un tiers des élèves de la classe suivent l'option latin signifie qu'une proportion de $\frac{1}{3}$ des 24 élèves sont latinistes. On calcule donc $24 \times \frac{1}{3} = \frac{24}{3} = 8$. Donc, 8 élèves sont latinistes.

52.4 b) On sait que 25 % des élèves de la classe aiment les jeux vidéos, ce qui signifie qu'une proportion de $\frac{25}{100}$ des 24 élèves sont passionnés. On calcule donc $24 \times \frac{25}{100} = \frac{24}{4} = 6$. Donc 6 élèves aiment les jeux vidéos.

52.4 c) Dans la classe de 24 élèves, il y a 12 filles. Pour obtenir la proportion de filles, on calcule $\frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0,5 = \frac{50}{100}$. Donc 50 % des élèves sont des filles.

52.5 a) Notons x le nombre total de stylos. On a $\frac{15}{100} \times x = 9$. Donc $x = \frac{100}{15} \times 9 = \frac{100 \times 9}{15}$. Il reste à poser la division euclidienne de 900 par 15, qui donne un quotient valant 60 et un reste nul.

52.5 b) Notons x le nombre total de lycéens. On a $\frac{37}{100} \times x = 851$. Donc $x = \frac{100}{37} \times 851$. Il reste à poser la division euclidienne de 851 par 37, qui donne un quotient valant 23 et un reste nul.

52.5 c) Notons x le nombre total de poissons dans l'aquarium. Un tiers des poissons de l'aquarium sont des esturgeons, ce qui signifie qu'une proportion de $\frac{1}{3}$ des x poissons sont 12 esturgeons. On résout donc $x \times \frac{1}{3} = 12$, ce qui donne $x = 12 \times 3$. Donc il y a 36 poissons dans l'aquarium.

52.6 a) On calcule $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$, soit $\frac{1 \times 1}{2 \times 4} = \frac{1}{8}$. En posant la division de 100 par 8, on trouve 12,5. Donc $\frac{1}{8} = \frac{12,5}{100}$, ce qui donne 12,5 %.

52.6 b) On calcule 40 % de 65 %, soit $\frac{40 \times 65}{100 \times 100} = \frac{4 \times 10 \times 5 \times 13}{4 \times 25 \times 10 \times 2 \times 5} = \frac{13}{50}$.

52.6 c) On calcule le quart de 32 %, soit $\frac{1}{4} \times \frac{32}{100} = \frac{8 \times 4}{4 \times 100} = \frac{8}{100} = 0,08$.

52.7 Les enfants de moins de 8 ans représentent 80 % des enfants de moins de 10 ans et sont au nombre de 48, soit $\frac{48 \times 100}{80} = 60$ enfants ont moins de 10 ans, ce qui représente 10 % des participants de la colonie.

52.8 a) Le nombre de majeurs est Np donc la proportion de majeurs ayant le permis est $\frac{n}{Np}$.

52.8 b) Le nombre de personnes n'ayant pas le permis est $N - n$.

Fiche n° 53. Taux d'évolution

Réponses

53.1 a).....	1,32 €	53.4 c).....	2900	53.8 d).....	1
53.1 b).....	0,85	53.5 a).....	60	53.9 a).....	$\frac{F - I}{I}$
53.1 c).....	42 €	53.5 b).....	0,2	53.9 b).....	$\frac{F - I}{I} \times 100 \%$
53.1 d).....	3	53.5 c).....	20 %	53.9 c).....	$\frac{F}{I}$
53.2 a).....	1,3	53.5 d).....	378	53.9 d).....	$\frac{I}{F}$
53.2 b).....	1,52	53.5 e).....	26 %	53.9 e).....	$\frac{I - F}{F}$
53.2 c).....	2	53.5 f).....	(c)	53.9 f).....	$\frac{I - F}{F} \times 100 \%$
53.2 d).....	0,9	53.6 a).....	(a)	53.10 a).....	$0,91 \times N$
53.2 e).....	0,5	53.6 b).....	(b)	53.10 b).....	$0,95^3 \times N$
53.2 f).....	0	53.7 a).....	(a)	53.11 a).....	20 %
53.3 a).....	+20 %	53.7 b).....	(c)	53.11 b).....	10 %
53.3 b).....	+50 %	53.7 c).....	(b)	53.12 a).....	6 %
53.3 c).....	-10 %	53.8 a).....	$-\frac{1}{6}$	53.12 b).....	7,2 %
53.3 d).....	-50 %	53.8 b).....	$\frac{1}{9}$	53.12 c).....	$1,193\,136 \times N$
53.3 e).....	-50 %				
53.3 f).....	-75 %				
53.4 a).....	364				
53.4 b).....	130				

Corrigés

53.1 a) Augmenter un prix de 10 % revient à le multiplier par $1 + \frac{10}{100} = 1,1$. On trouve $1,20 \text{ €} \times 1,1 = 1,32 \text{ €}$.

53.1 b) Baisser un prix de 15 % revient à le multiplier par $1 - \frac{15}{100} = 0,85$.

53.1 c) Baisser un prix de 30 % revient à le multiplier par $1 - \frac{30}{100} = 0,7$. On trouve $60 \text{ €} \times 0,7 = 42 \text{ €}$.

53.1 d) Augmenter une population de 200 % revient à la multiplier par $1 + \frac{200}{100} = 3$.

53.2 a) Augmenter de 30 % revient à multiplier par $1 + \frac{30}{100} = 1,3$.

53.2 b) Augmenter de 52 % revient à multiplier par $1 + \frac{52}{100} = 1,52$.

53.2 d) Baisser de 10 % revient à multiplier par $1 - \frac{10}{100} = 0,9$.

53.2 f) Baisser de 100 % revient à multiplier par $1 - \frac{100}{100} = 0$.

53.3 a) On a $1,2 = 1 + \frac{20}{100}$; donc, multiplier par 1,2 revient à augmenter de 20 %.

53.3 c) On a $0,9 = 1 - \frac{10}{100}$; donc, multiplier par 0,9 revient à baisser de 10 %.

53.3 f) Diviser une quantité par 4 revient à la multiplier par $\frac{1}{4} = 1 - \frac{75}{100}$.

53.4 a) On note x l'effectif initial. On résout l'équation $x \times \frac{5}{4} = 455$.

53.4 b) On note x la taille initiale. On résout l'équation $x \times \frac{108}{100} = 140,4$.

53.4 c) On note x la somme initiale. On résout l'équation $x \times \frac{2}{100} = 58$.

53.5 b) On utilise la formule donnant le taux d'évolution ; on trouve $\frac{360 - 300}{300} = 0,2$.

53.5 c) On a, par définition, $20 \% = \frac{20}{100} = 0,2$.

53.5 d) On multiplie 360 par 1,05.

53.5 e) On calcule le produit des coefficients multiplicateurs $1,2 \times 1,05 = 1,26$, soit une hausse de 26 %.

53.5 f) Le nombre 78 représente 26 % de 300 et non de 378.

53.6 a) Pour la première promotion, le coefficient multiplicateur est 0,7. Pour la deuxième, ce coefficient vaut 0,7225 et, pour la dernière, on obtient 0,72. Le coefficient multiplicateur le plus petit des trois nous donne la baisse la plus importante.

53.6 b) Notons p le prix d'un produit en euros. La première proposition donne 3 produits pour $3 \times p \times 0,7 = 2,1 p$. La deuxième donne un tarif de $2p$ et la troisième un tarif de $2,5p$.

53.8 a) Le coefficient multiplicateur réciproque est $\frac{1}{1,2} = \frac{10}{12}$ donc le taux d'évolution est $\frac{10}{12} - 1 = \frac{-1}{6}$, soit une baisse d'un sixième.

53.11 a) Soit t l'augmentation annuelle moyenne, en pourcentage. La taille du troupeau a été multipliée chaque année par $1 + \frac{t}{100}$, ce qui donne, après deux augmentations successives, l'équation $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 = 1 + \frac{44}{100}$.

Or, la racine carrée de $\frac{144}{100}$ vaut $\frac{12}{10}$, et $1 + \frac{t}{100}$ est positif. On obtient $1 + \frac{t}{100} = \frac{12}{10}$, d'où $t = 20 \%$.

53.12 c) On obtient l'effectif final égal à $1,05 \times 1,06 \times 1,072 \times N$.

Fiche n° 54. Généralités sur les probabilités

Réponses

54.1 a)	$\boxed{\text{c}}$	54.2 c)	$\boxed{\frac{11}{36}}$	54.4 b)	$\boxed{\frac{3n+10}{4n+10}}$	54.6	$\boxed{\text{b}}$
54.1 b)	$\boxed{\frac{2}{3}}$	54.3	$\boxed{\frac{2}{3}}$	54.5 a)	$\boxed{\frac{1}{10}}$	54.7 a)	$\boxed{\frac{13}{14}}$
54.2 a)	$\boxed{\frac{1}{36}}$	54.4 a)	$\boxed{\text{c}}$	54.5 b)	$\boxed{\frac{3}{5}}$	54.7 b)	$\boxed{8}$
54.2 b)	$\boxed{\frac{1}{6}}$					54.7 c)	$\boxed{\text{b}}$

Corrigés

54.1 a) Les faces paires sont numérotées 2, 4, 6. Les faces numérotées d'un nombre multiple de 3 sont 3, 6.

Comme les issues sont équiprobables, $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Donc, on a $q < p$.

54.1 b) Comme les issues sont équiprobables, la probabilité d'obtenir un multiple de 3 vaut $\frac{1}{3}$. Ainsi, la probabilité de ne pas obtenir de multiple de 3 vaut $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

54.2 a) Il y a 36 résultats possibles et le seul cas favorable est le couple (3, 5).

54.2 b) Les cas favorables sont au nombre de 6 : il s'agit des cas (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5) et (6, 6). Comme les issues sont équiprobables, la probabilité vaut donc $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

54.2 c) Les cas favorables sont au nombre de 11 : il s'agit des cas (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5).

54.3 On note p la probabilité de renvoyer « Pile ». La probabilité de renvoyer « Face » vaut donc $\frac{p}{2}$. Ainsi, on a $p + \frac{p}{2} = 1$, et donc $p = \frac{2}{3}$.

54.4 a) Le nombre de boules rouges vaut $2n$ et le nombre de boules noires vaut $n + 10$. Ainsi, le nombre total de boules vaut $n + 2n + n + 10 = 4n + 10$.

54.4 b) L'événement contraire est : « Obtenir une boule bleue ». Ainsi, on a $P(\bar{A}) = \frac{n}{4n+10}$ et :

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{n}{4n+10} = \frac{4n+10-n}{4n+10}.$$

54.5 a) On a $p_1 + 2p_1 + 3p_1 + 4p_1 = 1$, donc $10p_1 = 1$, puis $p_1 = \frac{1}{10}$.

54.5 b) La probabilité vaut $p_2 + p_4 = 2p_1 + 4p_1 = 6p_1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

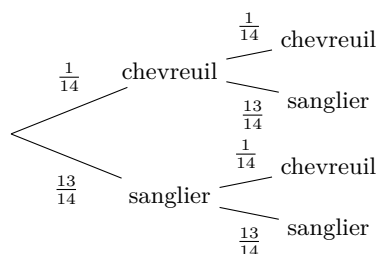
54.6 Pour obtenir la valeur 2, il faut que les deux lancers aient renvoyé la valeur 1. Ainsi, il n'y a qu'un seul cas favorable sur les 36 lancers possibles. Comme les issues sont équiprobables, la probabilité vaut $\frac{1}{36}$.

54.7 a) Il s'agit de l'événement complémentaire à « Obtenir un chevreuil ». Sa probabilité vaut donc $1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$.

54.7 b) Comme $\frac{y}{112} = \frac{1}{14}$, alors $y = \frac{112}{14} = 8$.

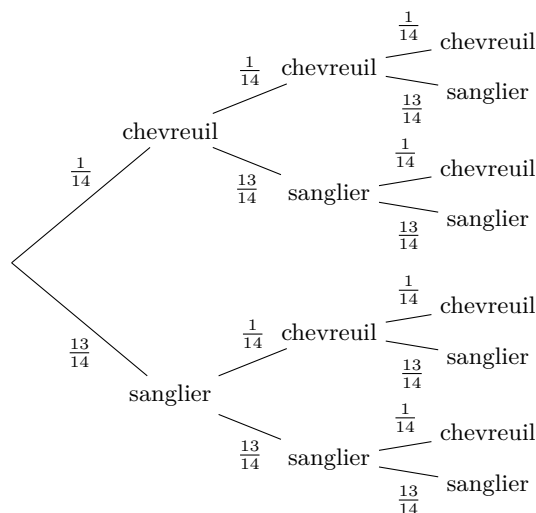
54.7 c) Si un seul animal est prélevé, la probabilité qu'on n'ait pas obtenu de chevreuil est égale à celle d'avoir obtenu un sanglier, c'est-à-dire $\frac{13}{14}$.

Si deux animaux sont prélevés, on peut représenter les prélèvements successifs par un arbre de probabilité :



La probabilité de n'obtenir aucun chevreuil est égale à celle de n'obtenir que des sangliers et elle vaut donc $\frac{13}{14} \times \frac{13}{14} = \left(\frac{13}{14}\right)^2$.

Si trois animaux sont prélevés, on ajoute une génération de plus à l'arbre de probabilité :



La probabilité de n'obtenir aucun chevreuil est égale à celle de n'obtenir que des sangliers et elle vaut donc $\frac{13}{14} \times \frac{13}{14} \times \frac{13}{14} = \left(\frac{13}{14}\right)^3$.

Si, comme demandé dans l'énoncé, 10 animaux sont prélevés, l'arbre possède 10 niveaux de branches. La probabilité de n'obtenir que des sangliers vaut alors $\underbrace{\frac{13}{14} \times \cdots \times \frac{13}{14}}_{10 \text{ facteurs}} = \left(\frac{13}{14}\right)^{10}$.

Fiche n° 55. Probabilités d'intersections et de réunions

Réponses

55.1 a)	$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$	55.3 b)	$\frac{11}{12}$	55.7 a)	$\frac{6}{35}$
55.1 b)	$\{3\}$	55.4 a)	0,234	55.7 b)	$\frac{4}{7}$
55.1 c)	$\{4, 7\}$	55.4 b)	0,305	55.7 c)	$\frac{2}{7}$
55.1 d)	$\{2, 4, 5, 6, 7\}$	55.4 c)	$\frac{3}{8}$	55.7 d)	$\frac{24}{35}$
55.1 e)	$\{1, 6\}$	55.4 d)	$\frac{1-p}{12}$	55.8 a)	non
55.1 f)	$\{1, 2, 3, 6\}$	55.5 a)	0,95	55.8 b)	$\frac{a+b-d}{N}$
55.2 a)	« La carte tirée est la dame de cœur »	55.5 b)	0,12	55.8 c)	$\frac{N-a-b+d}{N}$
55.2 b) ..	« La carte tirée est un cœur ou un trèfle »	55.5 c)	0,99	55.8 d)	$\frac{b-d}{N}$
55.2 c) .	« La carte tirée n'est ni un trèfle, ni un cœur »	55.6 a)	$\frac{3}{5}$	55.8 e)	$\frac{a+c-N}{N}$
55.2 d)	$D \cap \overline{C}$	55.6 b)	$\frac{13}{20}$	55.8 f)	$\frac{N-c-d}{N}$
55.2 e)	$\overline{C} \cap \overline{T}$	55.6 c)	$\frac{9}{20}$	55.8 g)	$\frac{2N-a-b-c}{N}$
55.2 f)	$(D \cap C) \cup (D \cap T)$	55.6 d)	$\frac{4}{5}$		
55.3 a)	0,9	55.6 e)	$\frac{1}{5}$		

Corrigés

55.1 d) On a $\overline{A} \cup C = \{4, 5, 6, 7\} \cup \{2, 4, 7\} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$.

55.1 e) On a $\overline{B} \cap \overline{C} = \{1, 2, 6\} \cap \{1, 3, 5, 6\} = \{1, 6\}$.

55.1 f) On a $A \cup (\overline{B} \cap \overline{C}) = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 6\} = \{1, 2, 3, 6\}$.

55.2 a) L'événement $C \cap D$ se réalise si, et seulement si, les événements C et D se réalisent tous les deux.

55.2 b) L'événement $C \cup T$ se réalise si, et seulement si, l'un des deux événements C ou T se réalise.

55.2 c) L'événement $\overline{T} \cap \overline{C}$ se réalise si, et seulement si, aucun des deux événements T et C ne se réalise.

55.2 d) L'événement se réalise si, et seulement si, D se réalise et C ne se réalise pas.

55.2 e) L'événement se réalise si, et seulement si, aucun des deux événements C et T ne se réalise.

55.2 f) L'événement se réalise si, et seulement si, l'un des deux cas de figure suivants se produit :

- ou bien les événements D et C se réalisent tous deux ;
- ou bien les événements D et T se réalisent tous deux.

55.3 a) On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,9$.

55.3 b) On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{12} + \frac{6}{12} - \frac{4}{12} = \frac{11}{12}$.

55.4 a) On a $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,234$.

55.4 b) On a $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A}) + P(B) - P(A \cup B) = 0,305$.

55.4 c) On a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - 1 + P(\bar{A}) \\ &= \frac{15}{24} + \frac{8}{24} - \frac{24}{24} + \frac{10}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

55.4 d) On a $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) + 1 - P(\bar{B}) - P(A \cup B)$; donc, on a :

$$P(A \cap B) = \frac{1-p}{6} + 1 - \frac{2p+1}{3} - \frac{3-3p}{4} = \frac{2-2p+12-8p-4-9+9p}{12} = \frac{1-p}{12}.$$

55.5 a) On a $C = \bar{A}$ donc $P(C) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,95$.

55.5 b) On a $D = A \cup B$ donc $P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,12$.

55.5 c) L'événement contraire de E est : « Les deux serveurs sont en panne ». On a donc $\bar{E} = A \cap B$; autrement dit, on a $E = \overline{A \cap B}$, d'où $P(E) = 1 - P(A \cap B) = 0,99$.

55.6 a) On considère ici l'ensemble Ω des 200 clients, muni de sa probabilité uniforme P . On a alors :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}.$$

55.6 b) De même, on a $P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{130}{200} = \frac{13}{20}$.

55.6 c) L'événement $A \cap B$ est : « Le client a commandé une entrée et un dessert ». On a donc de même :

$$P(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{90}{200} = \frac{9}{20}.$$

55.6 d) L'événement considéré est $A \cup B$. On a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{20} + \frac{13}{20} - \frac{9}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

55.6 e) L'événement considéré est l'événement contraire de $A \cup B$. Sa probabilité est donc $1 - P(A \cup B) = \frac{1}{5}$.

55.7 a) On considère ici l'ensemble Ω des 175 élèves, muni de sa probabilité uniforme P . On a alors :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{30}{175} = \frac{2 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 7} = \frac{6}{35}.$$

55.7 b) On a $P(F) = \frac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{100}{175} = \frac{4 \times 25}{7 \times 25} = \frac{4}{7}$.

55.7 c) On a $P(T) = \frac{\text{Card}(T)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{50}{175} = \frac{2 \times 25}{7 \times 25} = \frac{2}{7}$.

55.7 d) L'événement considéré est $F \cup T$. On a $P(F \cup T) = P(F) + P(T) - P(F \cap T)$. Or, on a :

$$P(F \cap T) = \frac{\text{Card}(F \cap T)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{30}{175} = \frac{6}{35}.$$

$$\text{On a donc } P(F \cup T) = \frac{20}{35} + \frac{10}{35} - \frac{6}{35} = \frac{24}{35}.$$

55.8 a) On n'a pas $N = a + b + c$: en effet, si (par exemple) des élèves ont mangé à la fois un yaourt *et* un fruit, alors on aura $a + b + c > N$.

55.8 b) L'événement considéré est $A \cup B$. On a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} + \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} - \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{a + b - d}{N}.$$

55.8 c) On a $D = \overline{A \cup B}$ donc $P(D) = 1 - P(A \cup B) = \frac{N - a - b + d}{N}$.

55.8 d) L'événement considéré est $B \cap C$. Comme aucun élève n'a pris un fruit seul, l'événement $B \cap A$ et l'événement $B \cap C$ ont pour réunion B . Comme ils sont incompatibles, on a $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap C)$. D'où :

$$P(B \cap C) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{b - d}{N}.$$

55.8 e) L'événement considéré est $A \cap C$. On a $P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C)$. Or, l'événement $A \cup C$ est certain puisqu'aucun élève n'a pris un fruit seul et chacun a pris au moins dessert. On a donc :

$$P(A \cup C) = 1, \text{ d'où } P(A \cap C) = \frac{a + c - N}{N}.$$

55.8 f) Les événements E , $A \cap B$ et $A \cap C$ sont deux à deux incompatibles et ont pour réunion A .

On a donc $P(A) = P(E) + P(A \cap B) + P(A \cap C)$ et donc :

$$P(E) = P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) = \frac{a - d - (a + c - N)}{N} = \frac{N - c - d}{N}.$$

55.8 g) Puisqu'aucun élève n'a pris un fruit seul, l'événement considéré est $F = D \cup E$. Comme D et E sont incompatibles, on a $P(F) = P(D) + P(E) = \frac{N - a - b + d}{N} + \frac{N - c - d}{N} = \frac{2N - a - b - c}{N}$.

Fiche n° 56. Probabilités conditionnelles

Réponses

56.1 a)	$\frac{2}{3}$	56.4 b)	$\frac{9}{28}$	56.8 b)	$\frac{n-m}{N}$
56.1 b)	$\frac{1}{3}$	56.5 a)	voir corrigé	56.8 c)	voir corrigé
56.1 c)	$\frac{1}{6}$	56.5 b)	0,56	56.8 d)	$\frac{124}{937}$
56.1 d)	$\frac{1}{4}$	56.5 c)	0,6	56.8 e)	$\frac{87}{124}$
56.1 e)	$\frac{1}{9}$	56.5 d)	$\frac{1}{15}$	56.8 f)	$\frac{17}{30}$
56.1 f)	$\frac{1}{4}$	56.6 a)	$\frac{3}{10}$	56.9 a)	$\frac{260}{260+16}$
56.2 a)	voir corrigé	56.6 b)	$\frac{1}{2}$	56.9 b)	$\frac{16}{16+1+20+1}$
56.2 b)	voir corrigé	56.6 c)	$\frac{2}{5}$	56.9 c)	$\frac{260+200+1}{260+16+200+20+1+1}$
56.3 a)	$\frac{15}{28}$	56.6 d)	$\frac{3}{8}$	56.10 a)	voir corrigé
56.3 b)	$\frac{32}{45}$	56.7 a)	0,6	56.10 b)	0,26
56.3 c)	$\frac{20}{37}$	56.7 b)	$\frac{3}{50}$	56.10 c)	$\frac{9}{13}$
56.4 a)	$\frac{3}{32}$	56.7 c)	$\frac{33}{50}$	56.10 d)	$\frac{1}{37}$
		56.8 a)	$\frac{N+M-n}{N+M}$	56.10 e)	voir corrigé

Corrigés

56.1 e) On sait que $P(A \cap B) = P(A) P_A(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$.

56.1 f) On sait que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

56.2 a) On a :

P(A)	$P_A(B)$	$P(A \cap B)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{14}{27}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{9}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{25}$

56.2 b) On a :

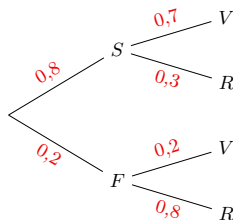
$P(A)$	$P_A(B)$	$P(A \cap B)$
$\frac{3}{5}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{2}{9}$
$\frac{7}{13}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{52}$
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$

56.3 a) On utilise la formule rappelée dans l'énoncé pour déduire $P_B(A) = \frac{P_A(B) P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{4}{7}}{\frac{2}{5}} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$.

56.4 a) On a $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{1}{8}$ et $P(B) = \frac{7}{9}$. Alors, $P_B(A) = \frac{\frac{1}{8} \times \frac{7}{12}}{\frac{7}{9}} = \frac{3}{32}$.

56.4 b) On a $P_A(B) = 1 - P_A(\bar{B}) = \frac{6}{7}$ et $P(\bar{B}) = 1$. Alors, $P_B(A) = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{6}{7}}{1} = \frac{9}{28}$.

56.5 a) On a l'arbre suivant :



56.5 b) On lit l'arbre : $P(S \cap V) = 0,8 \times 0,7 = 0,56$.

56.5 c) On a, d'après la formule des probabilités totales : $P(V) = P(S \cap V) + P(F \cap V) = 0,56 + 0,04 = 0,6$.

56.5 d) On a $P_V(F) = \frac{P(F \cap V)}{P(V)} = \frac{0,04}{0,6} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$.

56.6 c) D'après la formule des probabilités totales, $P(R) = P(S_1 \cap R) + P(S_2 \cap R) = \frac{3}{20} + \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$.

56.6 d) On sait que $P_R(S_1) = \frac{P(R \cap S_1)}{P(R)} = \frac{3}{8}$.

56.7 b) On note EG l'événement « Élie vise à gauche » et A l'événement « le gardien arrête le tir ». On définit de même ED pour « Élie vise à droite ». On a : $P(EG \cap A) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{3}{50}$.

56.7 c) On a : $P(ED \cap A) = \frac{7}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{14}{50}$.

La probabilité que le gardien arrête le tir est $P(A) = P(ED \cap A) + P(EG \cap A) = \frac{17}{50}$.

Ainsi, la probabilité qu'il y ait but est $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{17}{50} = \frac{33}{50}$.

56.8 a) Arthur a lu n livres sur $N + M$, la probabilité qu'il l'ait déjà lu est donc de $\frac{n}{N + M}$.

On déduit donc que la probabilité qu'il ne l'ait pas lu est de $1 - \frac{n}{N + M} = \frac{N + M - n}{N + M}$.

56.8 b) Il y a N livres en français et il en a lu $n - m$ en français. La probabilité est donc de $\frac{n - m}{N}$.

56.8 c) On a le tableau suivant :

Prénom	Nombre de livres en français lus	Nombre de livres en anglais lus	Total
Arthur	208	28	236
Ben	37	87	124

56.8 d) Ben a lu 124 livres sur les 937, la probabilité qu'il l'ait déjà lu est donc de $\frac{124}{937}$.

56.8 f) Arthur et Ben ont déjà lu $13 + 17 = 30$ livres en commun. Ainsi, la probabilité qu'il soit en français, sachant qu'ils l'ont déjà lu, est de $\frac{17}{30}$.

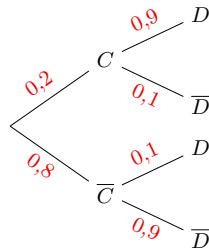
56.9 a) Il y a $260 + 16$ élèves du groupe A. La probabilité qu'elle soit du « rhésus - » vaut $\frac{260}{260 + 16} \left(= \frac{65}{69} \right)$.

56.9 b) Il y a $16 + 1 + 20 + 1 = 38$ personnes du « rhésus - ».

La probabilité qu'elle soit du groupe A est donc de $\frac{16}{16 + 1 + 20 + 1} \left(= \frac{8}{19} \right)$.

56.9 c) Il y a $260 + 16 + 200 + 20 + 1 + 1 = 498$ personnes qui ne sont pas du groupe B. La probabilité qu'elle soit du « rhésus + » est donc de $\frac{260 + 200 + 1}{260 + 16 + 200 + 20 + 1 + 1} \left(= \frac{461}{498} \right)$.

56.10 a) On a l'arbre suivant :

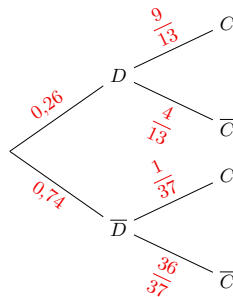


56.10 b) On a $P(D) = 0,2 \times 0,9 + 0,8 \times 0,1 = 0,18 + 0,08 = 0,26$.

56.10 c) On a $P_D(C) = \frac{0,2 \times 0,9}{0,26} = \frac{0,18}{0,26} = \frac{9}{13}$.

56.10 d) On a $P(\bar{D}) = 0,74$ et $P(\bar{D} \cap C) = 0,02$ donc $P_{\bar{D}}(C) = \frac{0,02}{0,74} = \frac{2}{74} = \frac{1}{37}$.

56.10 e) On a l'arbre suivant :



Fiche n° 57. Diviseurs et multiples

Réponses

- 57.1 a) $3 \times 152 + 1$ 57.3 c) $\{1, 5, 25, 125\}$ 57.5 c) $a = c = 1$ et $b = 2$
- 57.1 b) $6 \times 145 + 3$ 57.3 d) .. $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 19, 20, 38, 40, 76, 95, 152, 190, 380, 760\}$ 57.5 d) $a = 4$ et $b = c = 2$
- 57.1 c) $12 \times 699 + 6$ 57.4 a) 9 57.5 e) $a = b = c = 2$
- 57.1 d) $15 \times 449 + 0$ 57.4 b) 22 57.6 a) pair
- 57.1 e) $11 \times 3\,513 + 4$ 57.4 c) 135 57.6 b) impair
- 57.1 f) $31 \times 1\,851 + 2$ 57.4 d) 45 57.6 c) pair
- 57.2 voir corrigé 57.5 a) $a = 1$ et $b = 2$ 57.6 d) impair
- 57.3 a) $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ 57.5 b) $a = 2$ et $b = c = 1$ 57.6 e) impair
- 57.3 b) $\{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$ 57.6 f) pair

Corrigés

57.1 d) On a :

$$\begin{array}{r}
 6\,735 \\
 - 60 \\
 \hline
 73 \\
 - 60 \\
 \hline
 135 \\
 - 135 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 15 \\
 \hline
 449
 \end{array}$$

Cela s'écrit $6\,735 = 15 \times 449 + 0$.

Nous sommes dans le cas où le reste est nul, nous venons donc de montrer que 15 divise 6 735.

57.1 f) On a :

$$\begin{array}{r}
 5\,7383 \\
 - 31 \\
 \hline
 263 \\
 - 248 \\
 \hline
 158 \\
 - 155 \\
 \hline
 33 \\
 - 31 \\
 \hline
 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 31 \\
 \hline
 1851
 \end{array}$$

Cela s'écrit $57\,383 = 31 \times 1\,851 + 2$.

57.2 Pour compléter rapidement ces tableaux, il faut utiliser les critères de divisibilité. On obtient alors :

Nombre	2	3	5	9	10
252	✓	✓		✓	
845			✓		
9945		✓	✓	✓	
12345		✓	✓		
21879		✓		✓	

Nombre	2	3	5	9	10
1054	✓				
15606	✓	✓		✓	
110751		✓			
142290	✓	✓	✓	✓	✓
191479					

57.3 a) La liste des diviseurs positifs de 100 est $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$. Si l'on voulait la liste complète des diviseurs, il faudrait rajouter tous les opposés de ces nombres.

57.3 b) La liste des diviseurs positifs de 99 est $\{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$.

57.4 a) Comme dans l'exercice précédent, on cherche les diviseurs de 45 et de 72. On trouve que les diviseurs positifs de 45 sont $\{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$ et ceux de 72 sont $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$. On remarque alors que le plus grand nombre qui divise à la fois 45 et 72 est 9.

57.4 b) Les diviseurs positifs de 154 sont $\{1, 2, 7, 11, 14, 22, 77, 154\}$ et ceux de 242 sont $\{1, 2, 11, 22, 121, 242\}$. On remarque alors que le plus grand diviseur commun de 154 et 242 est 22.

57.4 c) On pourrait faire comme précédemment, mais, comme toujours, il est bon d'analyser la situation avant de se lancer. Ici, le plus grand diviseur de 135 est évidemment 135. Le plus grand diviseur commun de 135 et 270 est donc inférieur ou égal à 135. Mais on remarque que $270 = 135 \times 2$. Ainsi, 135 est également un diviseur de 270, et par suite, le plus grand diviseur commun de 135 et 270 est 135.

57.5 a) Il est inutile d'aller chercher loin. Un bon contre-exemple est celui qui met le doigt sur le problème le plus simplement possible. Bien sûr, il existe une infinité de bonnes réponses à cet exercice. Ici, 1 divise 2 mais 2 ne divise pas 1.

57.5 b) On constate que 2 divise $1 + 1 = 2$, bien que 2 ne divise pas 1.

57.6 a) Comme a est un entier pair et b est un entier impair, fixons pour toute la suite deux entiers p et q tels que $a = 2p$ et $b = 2q + 1$. Ainsi, $a^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2 \times (2p^2)$. Par définition, a^2 est donc pair.

57.6 b) Sur le même principe que la question précédente, on écrit :

$$b^2 = (2q + 1)^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 2 \times (2q^2 + 2q) + 1.$$

Ainsi, b^2 est impair par définition.

57.6 c) On a $ab = 2p \times (2q + 1) = 2 \times p(2q + 1)$, où $p(2q + 1)$ est un entier. Ainsi, ab est pair par définition.

57.6 e) Pour changer, tirons des leçons des premières questions. Nous savons déjà que a^2 est pair. De plus, le produit de deux nombres impairs est impair : si cela nous échappe, on peut le redémontrer comme précédemment. Ainsi, $3b$ est impair. Enfin, la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire, donc $a^2 + 3b$ est impair.

Fiche n° 58. Nombres premiers et applications

Réponses

58.1 a).....	$\boxed{2}$	58.3 b).....	$\boxed{2^2 \times 5^2}$	58.5 c).....	$\boxed{\frac{1}{5}}$
58.1 b).....	$\boxed{3}$	58.3 c).....	$\boxed{3^2 \times 11}$	58.5 d).....	$\boxed{\frac{2}{5}}$
58.1 c).....	$\boxed{5}$	58.3 d).....	$\boxed{2^3 \times 3^2 \times 5}$	58.6 a).....	$\boxed{\frac{20}{9}}$
58.1 d).....	$\boxed{7}$	58.3 e).....	$\boxed{2^4 \times 5}$	58.6 b).....	$\boxed{5}$
58.1 e).....	$\boxed{11}$	58.3 f).....	$\boxed{2^6}$	58.6 c).....	$\boxed{\frac{27}{11}}$
58.1 f).....	$\boxed{13}$	58.4 a).....	$\boxed{\frac{2^2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3^4}}$	58.6 d).....	$\boxed{\frac{98}{363}}$
58.1 g).....	$\boxed{17}$	58.4 b).....	$\boxed{\frac{2 \times 5^2}{2^3 \times 3 \times 5^2}}$	58.7 a).....	$\boxed{9}$
58.1 h).....	$\boxed{19}$	58.4 c).....	$\boxed{\frac{2^4 \times 17^2}{2 \times 3^3 \times 11}}$	58.7 b).....	$\boxed{9}$
58.1 i).....	$\boxed{23}$	58.4 d).....	$\boxed{\frac{2^2 \times 3 \times 5^4}{2^4 \times 3 \times 5 \times 11}}$	58.7 c).....	$\boxed{\{2, 3, 5, 7\}}$
58.2 a).....	$\boxed{3 \times 5}$	58.5 a).....	$\boxed{\frac{5}{6}}$	58.7 d).....	$\boxed{\text{non}}$
58.2 b).....	$\boxed{3 \times 7}$	58.5 b).....	$\boxed{\frac{3}{4}}$	58.7 e).....	$\boxed{\text{non}}$
58.2 c).....	$\boxed{2^2 \times 5}$			58.7 f).....	$\boxed{\text{non}}$
58.2 d).....	$\boxed{7^2}$			58.7 g).....	$\boxed{\text{non}}$
58.2 e).....	$\boxed{2 \times 5^2}$			58.7 h).....	$\boxed{\text{oui}}$
58.2 f).....	$\boxed{2^3 \times 3}$				
58.3 a).....	$\boxed{2 \times 3 \times 5^2}$				

Corrigés

58.3 a) On a $150 = 10 \times 15 = 2 \times 5 \times 3 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2$.

58.3 b) On a $100 = (10)^2 = (2 \times 5)^2 = 2^2 \times 5^2$.

58.3 c) On a $99 = 3 \times 33 = 3 \times 3 \times 11 = 3^2 \times 11$.

58.3 d) On a $360 = 36 \times 10 = 4 \times 9 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

58.3 e) On a $80 = 8 \times 10 = 2^4 \times 5$.

58.3 f) On a $64 = 32 \times 2 = 16 \times 2 \times 2 = 2^4 \times 2 \times 2 = 2^6$.

58.4 a) On écrit $21 = 3 \times 7$ et $4 = 2^2$, puis $6^2 = 2^2 \times 3^2$ et $18 = 2 \times 3^2$. Finalement, on trouve $\frac{2^2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3^4}$.

58.4 b) On écrit $25 = 5^2$, puis $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $20 = 2^2 \times 5$. Finalement, on trouve $\frac{2 \times 5^2}{2^3 \times 3 \times 5^2}$.

58.4 c) On écrit $16 = 2^4$, puis $22 = 2 \times 11$ et $3 \times 9 = 3^3$. Finalement, on trouve $\frac{2^4 \times 17^2}{2 \times 3^3 \times 11}$.

58.4 d) On écrit $12 = 2^2 \times 3$ et $25^2 = 5^4$, puis $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ et $44 = 2^2 \times 11$. Finalement, on trouve :

$$\frac{2^2 \times 3 \times 5^4}{2^4 \times 3 \times 5 \times 11}.$$

58.5 a) On a $\frac{10}{12} = \frac{2 \times 5}{2^2 \times 3} = \frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$.

58.5 b) On a $\frac{18}{24} = \frac{2 \times 3^2}{2^3 \times 3} = \frac{3}{4}$.

58.5 c) On a $\frac{26}{130} = \frac{2 \times 13}{2 \times 5 \times 13} = \frac{1}{5}$.

58.5 d) On a $\frac{100}{250} = \frac{10 \times 10}{25 \times 10} = \frac{10}{25} = \frac{2 \times 5}{5 \times 5} = \frac{2}{5}$.

58.6 a) On a $\frac{1800}{810} = \frac{180}{81} = \frac{10 \times 18}{9 \times 9} = \frac{2 \times 5 \times 2 \times 9}{3^4} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5}{3^4} = \frac{20}{9}$.

58.6 b) On a $\frac{85}{17} = \frac{5 \times 17}{17} = 5$.

58.6 c) On écrit $3 \times 9 \times 99 = 3^5 \times 11$ et $33^2 = 3^2 \times 11^2$ pour aboutir à $\frac{3^3}{11} = \frac{27}{11}$.

58.6 d) On écrit $14 = 2 \times 7$, $49 = 7^2$ et $2\sqrt{81} = 2 \times 3^2$, puis $33^2 = 3^2 \times 11^2$ et $42 = 2 \times 3 \times 7$. D'où :

$$\frac{14 \times 49 \times 2\sqrt{81}}{33^2 \times 42} = \frac{2 \times 7^2}{3 \times 11^2} = \frac{98}{363}.$$

58.7 a) On a $9^2 = 81$ et $(9 + 1)^2 = 100$. Ainsi, 9 est bien solution des inéquations proposées.

58.7 c) D'après les questions précédentes, on a $\sqrt{97} < 10$. Donc, l'ensemble des nombres premiers p qui sont tels que $1 < p < \sqrt{97}$ est $\{2, 3, 5, 7\}$.

58.7 e) On a $97 = 32 \times 3 + 1$, donc 3 n'est pas un diviseur de 97.

58.7 g) On a $97 = 13 \times 7 + 6$, donc 7 n'est pas un diviseur de 97.

58.7 h) Grâce à la propriété admise, il suffit de tester la divisibilité de 97 par les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{97}$; donc, d'après ce qui précède, il suffit de tester la divisibilité de 97 par 2, 3, 5 et 7.

Comme aucun d'eux n'est un diviseur, on en déduit que 97 est un nombre premier.